

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



Observatoire astronomique
de Strasbourg

Mémoire de Master

Modélisation des oscillations quasi-périodiques dans les binaires X de faible masse

Master d'astrophysique
Supervision : J. Pétri - H. Batty

Dominique M.-A. Meyer

Observatoire Astronomique de Strasbourg
STRASBOURG 2010

Remerciements

Sont remerciées les personnes suivantes : monsieur Beretz Alain, président de l'Université de Strasbourg, monsieur Wozniak Hervé, directeur de l'Observatoire Astronomique de Strasbourg, monsieur Munch François, directeur de l'UFR de physique de Strasbourg, monsieur Jalabert Rudolfo, responsable des Master de physique de l'Université de Strasbourg, madame Lançon Ariane, responsable de la spécialité Astrophysique du Master de physique de l'Université de Strasbourg, monsieur Baty Hubert, directeur de l'équipe Hautes Energies de l'Observatoire Astronomique de Strasbourg, monsieur Pétri Jérôme, maître de conférence à l'Observatoire Astronomique de Strasbourg et encadrant de ce mémoire, ainsi que monsieur Michel Laurent, informaticien à l'Observatoire Astronomique de Strasbourg, monsieur Heayvarts Jean, professeur émérite en physique et en astrophysique, et messieurs Motch Christian et Pakull Manfred, chercheurs dans le même Observatoire pour leurs conseils avisés.

Résumé

Le phénomène d'oscillations quasi-périodiques (QPO, acronyme de Quasi-Periodic Oscillations) fut découvert vers 1990 grâce aux progrès instrumentaux dans le domaine de la spectrométrie en hautes énergies, réalisés lors du lancement de satellites tels que XMM Newton et Chandra. Ces émissions de lumière X se produisent dans les systèmes doubles accrés, lorsque le matériel transféré de l'objet donneur à l'objet receveur s'approche des régions internes du disque.

Ce travail s'inscrit dans la thématique des systèmes binaires X de faible masse (LMXB, pour Low Mass X Binaries) dont l'objet accrète une étoile à neutrons. Un modèle de production de QPO, basé sur des résonances mécaniques entre les mouvements orbital et épicyclique vertical d'une particule test lâchée dans le champ gravitationnel de l'étoile (voir réf. [8] et [9]). Des simulations numériques sont effectuées et comparées aux résultats d'une étude observationnelle menée par D.Barret et al. à partir de données renvoyées par l'appareil RXTE (voir réf. [2]). La confrontation entre théorie et observations se fait par le biais du suivi de l'évolution temporelle d'un QPO particulier observé en rayons X.

Il a été établi que le modèle analytique proposé permet de retrouver une partie des variations du facteur de qualité des QPOs en fonction de la fréquence de leur maximum pour une plage de fréquences allant de 400 à 800 Hz. Les simulations reproduisent une nette augmentation de l'amplitude du mouvement de la particule de part et d'autre du disque à environ 20 rayons gravitationnels de l'objet compact. Ceci est interprété comme un processus d'autorésonance de forçage engendré par un terme de nature non-linéaire dans l'équation différentielle du mouvement de la particule. Cette interprétation oscillatoire des résultats prend le contrepied de l'école qui associe le comportement du QPO à la seule géométrie de l'espace-temps au voisinage immédiat des LMXBs.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Les émissions X des systèmes binaires	5
2.1	Les objets compacts	5
2.2	Variabilité des binaires de faible masse dans le domaine X : les oscillations quasi-périodiques	6
3	Présentation du modèle analytique de génération des QPOs	12
3.1	Modélisation des QPOs	12
3.2	La méthode de la moyenne	15
3.3	Oscillations non-linéaires et autorésonnances de forçage	17
3.4	Evolutions des paramètres du modèle en fonction du temps	19
4	Résultats et interprétation	23
4.1	Nature des données relatives à l'objet 4U1636-536	23
4.2	Simulation de l'accrétion d'une particule par une étoile à neutrons	25
5	Conclusion	37
6	Annexe	38
6.1	Solution analytique pour l'oscillateur dissipatif entretenu	38
6.2	Solution pour l'oscillateur dissipatif forcé à la résonance	41
6.3	Erreurs entre les différentes méthodes de résolution des équations différentielles	41
6.4	Application de la méthode de la moyenne à l'équation différentielle du modèle.	43
6.5	Détermination de la paramétrisation de l'amplitude du signal X	47

Chapitre 1

Introduction

L'astrophysique des hautes énergies c'est profondément modifiée depuis l'avènement de spectromètres X à haute précision embarqués à bords de satellites artificiels tels que XMM Newton et Chandra. Les informations déduites au terme de ces campagnes de collecte de données ont permis d'avoir accès observationnellement à un certain nombre de processus dont l'existence n'était que théorique, et qui sont tributaires de la physique d'un type d'une structure particulière, les binaires X de faible masse.

Ces objets très particuliers prennent forme au sein de systèmes doubles dont l'une des composantes est constituée d'un trou noir de masse stellaire ou d'une étoile à neutrons. Un disque d'accrétion de matière stellaire, induit par les phénomènes de marées gravitationnelles, voit le jour autour de l'objet compact. La nature intrinsèque de la composante accrète, relevant de phénomènes relativistes, associée à la physique turbulente du disque permet le déroulement processus qui comptent parmi les énergétiques connus ainsi que l'existence de comportements extrêmes de la matière, à ce jour uniques dans l'Univers.

Les oscillations quasi-périodiques (QPO) sont un exemple de ces phénomènes. Il s'agit d'une variabilité des émissions en rayons X du disque de l'objet accrète. Probablement corrélées à l'écoulement du plasma dans les régions internes du disque où la fréquence orbitale de la matière atteint le kHz si l'objet compact est une étoile à neutrons et 300 Hz un trou noir, ces émissions présentent des variations rapides en intensité de l'ordre de la milliseconde. Leur origine probablement magnétohydrodynamique et gravitationnelle leur confère un caractère particulièrement intéressant dans l'étude des objets compacts proprement dits, en raison de la proximité de la zone où prennent naissance ces émissions avec la surface de l'étoile à neutrons ou de l'horizon du trou noir. Il est en effet possible de les utiliser afin d'étudier les propriétés macroscopiques de la matière dense, et de contraindre des grandeurs caractéristiques des objets compacts tels que leur rayon ou leur masse. Les QPOs sont enfin un moyen offert pour l'examen des lois de la physique et particulièrement de la relativité générale en champ fort. Ils contribuent également à l'établissement de contraintes sur les équations d'état des étoiles à neutrons.

Ce travail tend à modéliser les QPOs par le biais d'un modèle analytique déjà établie (voir réf. [9] et [12]) et se basant sur l'exploitation de résonances au sein du disque. Tout d'abord, le modèle sera introduit avant d'être étudié et compris par des simulations numériques. Enfin, il sera confronté aux observations relatives à l'objet 4U1636-536, un système double dont la composante accrète une étoile à neutrons.

Chapitre 2

Les émissions X des systèmes binaires

2.1 Les objets compacts

On nomme objets compacts les astres de petite taille par rapport à leur masse, qui constituent des stades ultimes de l'évolution stellaire. Ces astres sont caractérisés par une absence de combustion nucléaire dans leur intérieur ainsi qu'une masse M élevée qui leur confère, au regard de leur rayon physique R de l'ordre d'une dizaine à quelques centaines de kilomètre, une compacité M/R impor. Ces objets possèdent ainsi un fort champ gravitationnel et peuvent être accompagnés de champs magnétiques dont l'intensité atteint parfois les 10^{12}G . Formellement, est qualifié de compact un astre dont le paramètre de relativité Ξ est supérieur à 10^{-4} , i.e.

$$\Xi := \frac{GM}{Rc^2} = \frac{R_s}{2R} > 10^{-4}, \quad (2.1)$$

$$R_S := 2\frac{GM}{c^2}. \quad (2.2)$$

Au sein de l'expression (2.1) et de sa définition (2.2), R_S désigne le rayon de Schwarzschild de l'objet, c'est-à-dire la disà son centre de masse pour laquelle une particule test plongée dans le champ de gravité de qu'il engendre tomberait avec la vitesse de la lumière c . Le paramètre Ξ est ainsi une mesure du degré de proximité existe rayon physique R de l'astre avec son rayon R_S . Leur formation résulte d'une incapacité d'une étoile mourrante à générer la pression thermique qui lui permettait de contrebalancer sa propre gravité et qui était jusqu'alors garante de son équilibre. L'obtention d'un type d'objet compact plutôt que d'un autre est uniquement fonction de la masse de l'étoile qui s'effondre. Il existe plusieurs type d'objets compacts qu'il faut discriminer : les trous noirs, les étoiles à neutrons, les naines blanches, ainsi que les hypothétiques étoiles étranges.

Les trous noirs sont conséquence de l'effondrement total d'une étoile de masse initiale $M_\star > 40 M_\odot$ et de masse écroulée $M_\star > 3 M_\odot$ après un phénomène de type supernova. Il s'agit d'un puits de potentiel infiniment profond, une é générant un champ gravitationnel intense sur la matière qui se trouve à son voi. Lors de la contraction de l'étoile, l'énergie relachée casse les atomes constitutifs de la matière du coeur en effondrement, que le potentiel gigantesque du trou noir déforme la courbure de l'espace-temps et y aspire toute matière et

tout rayonnement. La relativité générale, théorie de la gravitation prédisant l'existence des trous noirs, leur rattache plusieurs paramètres fondamentaux (masse M , moment cinétique cinétique J et charge Q) et donne des solutions à certaines configurations de M , J et Q . Un trou noir sans charge et sans rotation ($M > 0, J = Q = 0$) est appelé trou noir de Schwarzschild et constitue une bonne approximation de la majorité des trous noirs existants. L'horizon désigne le rayon au-delà duquel il n'y a plus de transfert d'information possible entre l'intérieur du trou noir et le reste de l'Univers.

Les naines blanches sont des résidus stellaires aux dimensions particulièrement réduites, avec un rayon de l'ordre de 10000 km. Par conséquent leur luminosité est faible, et leur détection difficile. Elles proviennent de l'évolution d'étoiles de masse initiale $M_{\star} \leq 8 M_{\odot}$ pour une masse finale $M_{\star} \leq 1.45 M_{\odot}$ et possède en moyenne une masse de $0.6 M_{\odot}$. L'existence de tels objets est possible grâce à l'ionisation de la matière des couches internes de l'étoile, induite par la forte densité de matière. L'équilibre des naines blanches est rendu possible grâce à la pression de dégénérescence induite par les électrons de son intérieur.

Une étoile à neutrons est un objet compact provenant d'une étoile de masse initiale $M_{\star} > 8 M_{\odot}$ et de masse finale comprise entre 1.4 et $3 M_{\odot}$. La pression de dégénérescence des électrons ne permet plus de soutenir la masse du cœur stellaire, dont la densité augmente pour atteindre des valeurs de l'ordre de la densité des noyaux atomiques. Le contrebalancement de la gravité est assuré par une pression induite par les neutrons et les protons du milieu. Par un équilibrage progressif de réactions de dégradation β et de neutronisation, les couches internes de l'astre s'enrichissent en neutrons jusqu'à l'instauration d'un équilibre dynamique $e^{-} + p^{+} \rightleftharpoons n$. La densité de la matière des étoiles à neutrons fait que leur équation d'état demeure encore incertaine et constitue un sujet de recherche à part entière.

Enfin, la dernière catégorie d'objets compacts, les étoiles étranges, sont à mentionner. Il s'agit d'astres compacts environ de fois plus petits que les étoiles à neutrons, dont le cœur et parfois les couches intermédiaires sont constituées par des quarks de saveur S (Strange). Le contrebalancement de la gravité est alors assuré par l'interaction de couleur. Ces objets demeurent à ce jour hypothétiques.

2.2 Variabilité des binaires de faible masse dans le domaine X : les oscillations quasi-périodiques

Les systèmes doubles physiques sont formés de deux étoiles, souvent à des stades d'évolution différents, orbitant autour de leur centre de masse commun. Le potentiel gravitationnel ainsi créé, ou potentiel de Roche, est fonction des énergies gravitationnelles par unité de masse des deux astres et de la force centrifuge associée aux masses en mouvement. Dans le référentiel de corotation, il s'écrit, avec \vec{r} la variable de position, M_1 et M_2 les masses des composantes de la binaire, \vec{r}_i ($i \in 1, 2$) les positions des composantes et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire du système,

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} - \frac{GM_2}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|} - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2. \quad (2.3)$$

Les étoiles d'un système binaire sont spatialement délimitées par les équipotentielles du potentiel de Roche. L'évolution stellaire favorise des modifications de ce potentiel, puisque fonction des masses M_1 et M_2 . C'est-à-dire que la forme de l'astre est contraint par une

surface de potentiel cons. Lorsque l'une des composantes de la binaire présente un volume qui remplit et dépasse son lobe de Roche, la matière stellaire passe par le premier point de Lagrange¹ (noté L1) du système de masses, et commence un transfert de matériel de l'astre donneur vers le receveur : c'est le phénomène d'accrétion (voir fig. 2.1).

Les systèmes binaires en accrétion et dont l'une des composantes est un objet compact, présentent pour des raisons d'ordre gravitationnelles et de moment cinétique une géométrie du flux de matière particulière. En effet, le plasma accrété forme un disque qui s'établit dans le plan de l'équateur du receveur. Ces disques sont régis par une physique complexe, relevant à la fois de l'écoulement turbulent, de la physique des plasmas et de l'électromagnétisme. Les systèmes accrèvent être le lieu de phénomène d'éjection collimatées polaires, encore mal comprises. Selon la masse et la présence d'un champ magnétique propre au receveur, ainsi qu'aux masses des composantes, le système double prend une dénomination spécifique parmi l'ensemble des vocables qui qualifient la vaste taxonomie des systèmes accrétés (voir réf. [14]).

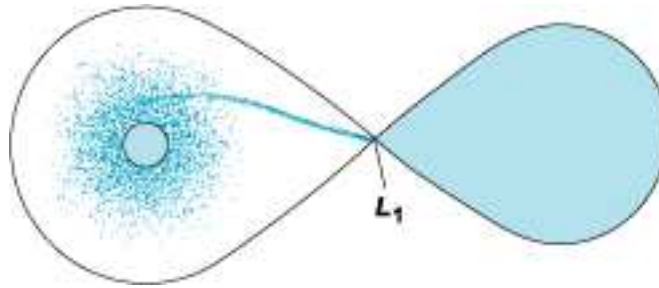


FIGURE 2.1 – Débordement du lobe de Roche et accrétion de matière autour d'un objet compact. (crédits : McGraw-Hill, The Encyclopédia of Science and Technology, Royaume-Uni, 2007)

Au sein de l'ensemble des objets physiques sièges de phénomènes d'accrétion, il existe des systèmes binaires composés d'une étoile à neutrons ou d'un trou noir de masse intermédiaire associé à un compagnon (en général une étoile de la séquence principale ou une géante rouge), et dont l'énergie d'accrétion est relâchée dans le milieu interstellaire sous forme de lumière appartenant à la plage X du spectre électromagnétique. Ces systèmes binaires principalement émetteurs X sont appelés LMXB (Low Mass X Binaries) si le donneur de matière est de faible masse, soit une masse $M \leq 1M_{\odot}$. Ils sont l'unique fenêtre observationnelle connue à ce jour sur la matière dense et la physique en forte gravité. En effet, ils consistent en un lieux de test de la relativité générale, par exemple via la prédiction de l'horizon des trous noirs. Les émissions X sont produites lors de la perte de l'énergie potentielle gravitationnelle accumulée au cours de l'accrétion, et constituent la majorité des émissions électromagnétiques de ces objets.

Le terme de variabilité des binaires X couvre l'ensemble des phénomènes de variation temporelle du signal X issus des LMXB, c'est-à-dire de l'émission de photons d'énergie l'ordre de 0.5 à 100 keV. La compacité des trous noirs ainsi que des étoiles à neutrons fait que ces astres sont très lumineux. En effet, la luminosité L d'un objet est proportionnelle à son rapport M/R (voir équation (2.4) où \dot{M} représente le taux d'accrétion de l'étoile),

1. Le potentiel de Roche délimite des surfaces équipotentielles constituant une limite spatiale aux régions subissant de manière prépondérante les effets gravitationnels de la binaire. Ces surfaces fermées voient leur aire augmenter en fonction de la dis à la binaire, et finissent par se rencontrer en un point où le gradient du potentiel de Roche $\|\vec{\nabla}\Phi(r)\|$ est nul. Le premier point de Lagrange (L1) est le point de contact entre ces deux lobes.

ainsi les régions les plus internes du disque sont aussi les plus chaudes et les plus émettrices de lumière. Les dernières dizaines de kilomètres du disque possèdent une période orbitale de l'ordre de la milliseconde,

$$L \propto \frac{GM\dot{M}}{2R}. \quad (2.4)$$

Les oscillations quasi-périodiques (QPO) sont un exemple de variabilité des LMXB. Elles se caractérisent par un train de pics caractéristique, et sont consécutives à des variations de la phase du signal X. L'intensité du spectre de Fourier correspondant (spectre de puissance) comporte par conséquent un large pic, repéré dans le signal par des algorithmes qui interpolent les QPOs par des fonctions gaussiennes ou lorentziennes. Un QPO est caractérisé par la fréquence du maximum de son pic f_0 et sa largeur à mi-hauteur Δf , son facteur de qualité $Q=f_0/\Delta f$.

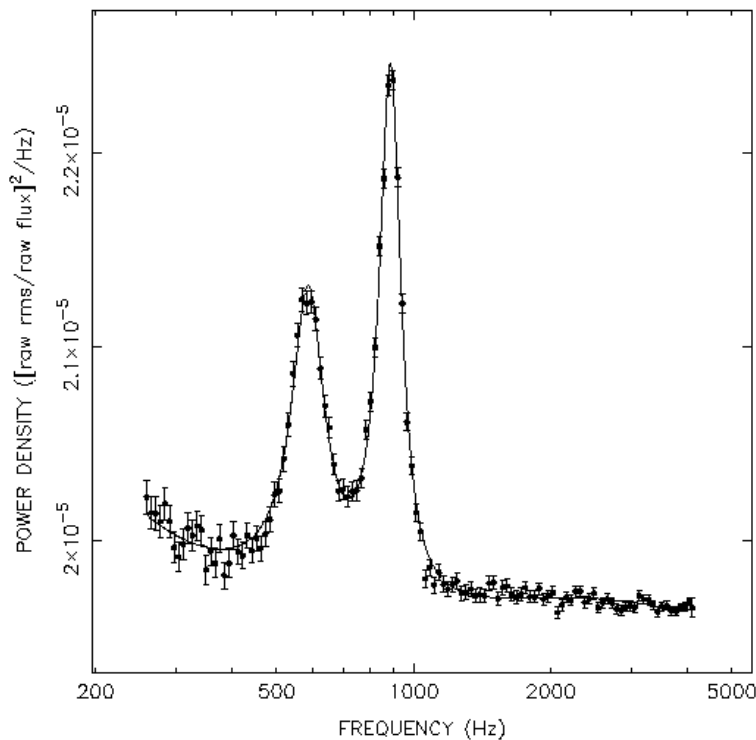


FIGURE 2.2 – Détail sur le couple de pics (QPO jumeaux) au kHz de l'intensité de la transformée de Fourier des émissions X du système binaire Cygnus-X1 (crédits : van der Klis et al., 1997, ApJ, 481, L97)

Des QPO produits à des fréquences de l'ordre du kiloHertz (kHz) furent découverts dans les années 1990 (voir réf. [4] et [17]) et rapidement détectés dans plusieurs dizaines de LMXB de la Voie Lactée. Présents entre 350 et 1250 Hz, ils peuvent être simple ou bien avoir l'aspect de deux pics séparés de quelques centaines de Hertz dans le spectre de puissance, d'où leur dénomination de pics jumeaux (voir Fig. 2.2). Toutes les tentatives d'explication quant à l'origine de ces QPO, nombreuses depuis une dizaine d'année, restèrent infructueuses. Cependant, la nature relativiste des objets accrédés LMXB rappelle que la

théorie de la relativité générale prédit l'existence d'une dernière orbite circulaire stable (Innermost Stable Circular Orbit), au-delà de laquelle toute particule de matière s'effondre sur la surface de l'étoile à neutrons ou traverse l'horizon du trou noir. Il a été établi (voir réf. [3] et [14]) pour un champ de Schwarzschild que l'expression de l'ISCO est,

$$R_{ISCO} = \frac{6GM}{c^2} = 3R_S. \quad (2.5)$$

Les QPOs peuvent s'interpréter comme une signature de cette dernière orbite stable, ce qui constituerait un argument de taille en faveur de la validité de la théorie de la relativité générale, mais participeraient également à la contrainte de l'équation d'état des étoiles à neutrons. Une illustration de l'ISCO est reportée en Fig. 2.3.

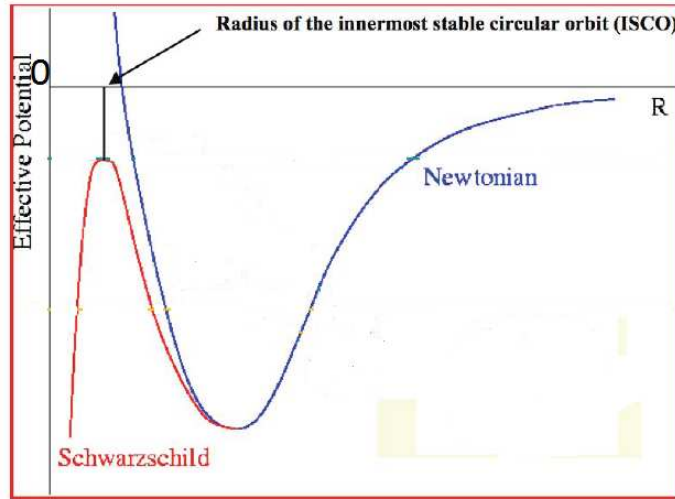


FIGURE 2.3 – Comparaison des potentiels effectifs de Newton et de Schwarzschild, avec mise en évidence du dernier orbite stable (ISCO) pour ce dernier (d'après Barret, 2006).

Outre les tests de la gravitation en champ fort, les QPOs sont des outils précieux dans la contrainte de l'équation d'état des étoiles à neutrons (voir réf. [17] et réf. [12]). Cela peut se voir de la manière suivante : on sait d'une part que les différents rayons caractéristiques du problème tolèrent la relation d'ordre suivante (avec $R_{orbital}$ le rayon de génération du QPO),

$$0 < R < R_{ISCO} < R_{orbital}. \quad (2.6)$$

D'autre part, les équations d'état des étoiles à neutrons se caractérisent par une relation de polytropique du type,

$$P = P(\rho). \quad (2.7)$$

Il est possible de convertir cette relation en une expression utilisant les variables de masse et de rayon,

$$M = M(R). \quad (2.8)$$

La traduction $P=P(\rho)$ en $M=M(R)$ se fait à partir des relations suivantes, dites d'Oppenheimer-Volkov,

$$\|\nabla P\| = -\left(\frac{GM(R)\rho(R)}{R^2}\right) \left(\frac{M(R) + 4\pi\rho(R)R^3P}{c^3R^2(1 - 2\frac{GM(R)}{Rc^2})}\right), \quad (2.9)$$

$$\|\nabla M\| = \frac{4\pi\rho(R)R^2}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}. \quad (2.10)$$

Enfin, en injectant dans les deux comparaisons de l'expression (2.6) l'expression képlérienne de la pulsation orbitale du corps engendrant la formation d'un QPO considéré,

$$\Omega_{orbital} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \quad (2.11)$$

Il est possible d'aboutir aux deux relations suivantes,

$$R^3 \leq \frac{GM}{4\pi\nu_{QPO}}, \quad (2.12)$$

$$M \leq \frac{1}{\nu_{QPO}} \left(\frac{c^3}{2\pi 6^{3/2}G}\right). \quad (2.13)$$

Elles possèdent la particularité d'être dépendante de la fréquence du QPO, déterminée par les observations, et donc de pouvoir sélectionner une région dans le digramme masse-rayon des étoiles à neutrons (voir Fig. 2.4).

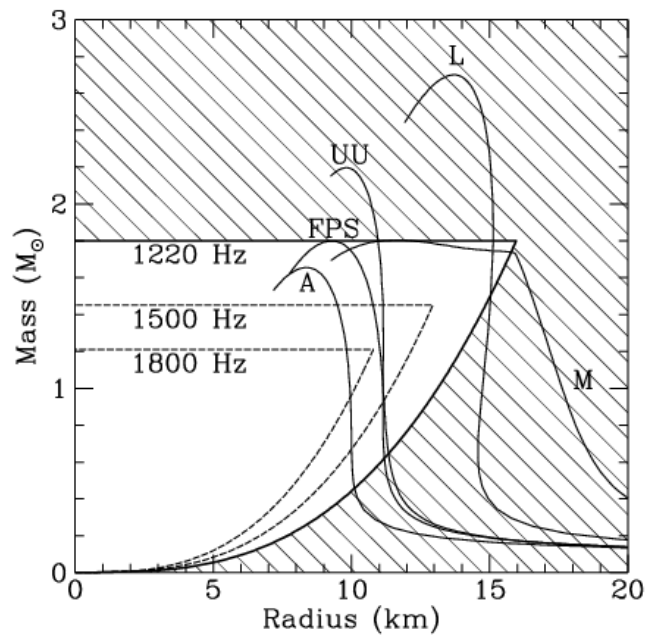


FIGURE 2.4 – Illustration de la sélection d'une partie du diagramme masse-rayon des étoiles à neutrons au moyen de la mesure de la fréquence orbitale de la région du disque produisant un QPO (Cole et Miller, 1998).

Chapitre 3

Présentation du modèle analytique de génération des QPOs

3.1 Modélisation des QPOs

La modélisation des QPOs est une thématique qui s'est fortement développée à partir du début des années 1990. La manière de procéder explorée ici consiste en la simulation de la trajectoire d'une particule test placée dans le disque d'accrétion d'un système double dont les grandeurs fondamentales (masse M_\star et rayon R_\star de l'objet accré) déterminent les ordres de grandeurs des phénomènes mis en jeu. Les QPOs proviendraient du mouvement des particules, oscillant successivement de part et d'autre du plan équatorial des objets accré, à des fréquences évoluant au cours du temps. Soulignons enfin que certains travaux (voir réf. [10] et [11]) complexifient le problème en proposant des descriptions hydrodynamiques d'accrétion ou encore en tenant compte de la magnétisation du disque.

Le modèle que l'on souhaite mettre à l'épreuve (voir réf. [8]) se base sur l'exploration d'un phénomène de résonance de forçage au sein d'un disque de nature képlérienne. La force excitatrice trouve son origine dans le caractère inhomogène de l'intérieur de l'objet compact. Si l'on considère une étoile à neutron d'une LMXB dans un référentiel dont l'origine coïncide avec son centre de masse, l'inhomogénéité de l'astre se modélise ici par une sphère de masse ponctuelle M_p placée à une distance $|\vec{R}_p| < R$ de l'origine. Le potentiel gravitationnel induit sur un point du disque de l'espace va fluctuer selon que l'inhomogénéité s'éloigne ou se rapproche de ce point. Les variations au cours du temps du potentiel sont induites par le moment cinétique orbital Ω_\star de l'objet compact. En choisissant un système de coordonnées cylindrique et en notant $\vec{R}_p(t) = (r_p, \phi_p = \Omega_\star t, z_p)$ les composantes de l'inhomogénéité, on écrit le potentiel total induit par l'étoile,

$$\Phi(r, \phi, z, t) = -\frac{GM_\star}{\|\vec{R}(t)\|} - \frac{GM_\star}{\|\vec{R}(t) - \vec{R}_p(t)\|}, \quad (3.1)$$

$$\Phi(r, \phi, z, t) = -\frac{GM_\star}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{GM_p}{\sqrt{(r - r_p)^2 + (z - z_p)^2}}. \quad (3.2)$$

Le caractère perturbatif de l'inhomogénéité permet de développer le potentiel¹ (voir réf. [9]) :

$$\Phi(r, \phi, z, t) = -\frac{GM_\star}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{GM_p}{\sqrt{r^2 + z^2}} \times \sum_{m=0}^{+\infty} b_m^{1/2}(x) \left(\frac{\sqrt{r_p^2 + z_p^2}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \cos(m(\Omega(t) - \Omega_\star t)). \quad (3.3)$$

Ainsi, le potentiel se comprend comme une superposition linéaire de termes dont l'influence gravitationnelle décroît avec l'augmentation du mode m qui les caractérise.

La visé du disque est modélisé via l'introduction d'un coefficient de dissipation γ dans l'équation du mouvement. Cette perte d'énergie peut également s'assimiler à un phénomène de transfert radiatif consécutif au chauffage de la matière du disque. La limite intérieure du disque est délimité par l'ISCO, seule trace de gravitation relativiste dans le modèle de disque. Le champ de gravité dans lequel baigne le disque est un champ de Schwarzschild, ainsi les expressions des épicycliques d'un corps son les mêmes que celle de sa fréquence képlérienne de révolution (voir réf [3]). Le fluide constituant le milieu est modélisé par un flux de particules ne possédant pas d'interactions entre elles et subissant le potentiel central (3.2) créé par l'objet compact. Une particule test de masse nulle est lâchée sur le disque à un rayon $r(t)$ de l'ordre de quelques dizaines de rayons gravitationnels R_g de l'objet accréd, avec un jeu de conditions initiales (r_0, z_0, \dot{z}_0) et dérive en direction du corps central. La simulation est arrêtée lorsque la particule arrive à la hauteur du rayon R_{ISCO} .

La modélisation du phénomène de QPO dans les binaires X de faible masse adoptée dans cette étude propose d'explorer le principe de résonances entre les différents mouvements périodiques auxquels est soumis la particule. Le modèle propose de considérer le mouvement épicyclique verticale qui rend compte de l'évolution de l'amplitude des oscillations de part et d'autre du plan équatorial comme une quantité tributaire des mêmes évolutions que l'intensité X des QPOs. Le problème est donc ramené à la compréhension d'un oscillateur classique particulier. En effet, l'équation régissant ce mouvement est celle d'un oscillateur harmonique représenl'épicyclique non perturbée, associée à un terme dissipatif représenles pertes d'énergies ainsi qu'au terme de forçage induit par le potentiel $\Phi(r, \phi, z, t)$.

La trajectoire oscillatoire du corps en accrédion dépendant en outre de paramètres variant au cours du temps et occasionnant des modifications des différentes pulsations qui la régissent. L'explication provient de la dépendance des paramètres du problème à la disr(t) au centre de l'objet. Selon le choix de conditions initiales, le système peut être le siège de résonances mécaniques, dont plusieurs types sont attendues. Tout d'abord, la résonance de corotation, caractéristique des corps en révolution prograde autour d'un objet central possédant une fréquence intrinsèque égale à la fréquence de rotation du corps,

$$\Omega = \Omega_\star. \quad (3.4)$$

Viens ensuite la résonance de forçage verticale, se produisant lorsque la fréquence épicyclique verticale de la particule égale un mode de la fréquence du terme de forçage, exciteur de l'orbite de la particule,

1. Le passage de (3.2) à (3.3) avec l'introduction des coefficients de Laplace $b_m^n(x) = \frac{2-\delta_m^0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m(\phi-\Omega_\star t))}{1+x^2-x^2\cos(\phi-\Omega_\star t)}$ dans le développement $(1-2\alpha\cos(\theta)+\alpha^2)^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_s^j \cos(j\theta)$. Notons que δ_m^0 est le symbole de Kronecker ($\delta_0^0=1$ et $\delta_{m\neq 0}^0=0$).

$$m|\Omega - \Omega_\star| = \kappa_z. \quad (3.5)$$

Enfin, ce modèle de QPO postule l'existence d'un phénomène d'autorésonance, c'est-à-dire une situation où le système en résonance maintient lui même les grandes amplitudes du forçage. Ceci est modélisé dans l'équation du mouvement par un terme non-linéaire dont des considérations d'ordre physique le portent au troisième ordre. Ainsi, l'équation du mouvement vertical de la particule est l'équation différentielle du second ordre à coefficients non constants second membre (3.6). Les coefficients de ces termes sont résumés dans le Tab. 3.1,

$$\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) + \Omega_0^2(t)z(t) = \alpha z^2(t) + \beta(t)z^3(t) + h_f(t) \cos(m(\Omega_f - \Omega_\star)t). \quad (3.6)$$

Paramètres de l'équation différentielle	Dénomination
Ω_0	pulsation propre de l'oscillateur au repos
$\omega_f = m(\Omega_f - \Omega_\star) + \phi$	amplitude de forçage
α	coefficient du terme non-linéaire quadratique
β	coefficient du terme non-linéaire cubique
γ	coefficient d'amortissement du système

TABLE 3.1 – Coefficients des différents termes de l'équation du mouvement.

Cette équation sera dans un premier temps résolue numériquement. Puis, une méthode d'approximation des équations différentielles, la méthode de la moyenne, lui sera appliquée. Cette dernière possède la propriété de donner accès à des conditions initiales particulières dont l'effet est de provoquer la stationnarité de la solution $z(t)$ au cours du temps. Ceci renseigne, et de manière analytique approchée sur les variations temporelles de l'amplitude. Les erreurs relatives entre ces solutions approximées seront appréciées dans des situations particulière telles que l'oscillateur harmonique dissipatif entretenu, où une solution analytique existe. Ensuite, les valeurs des paramètres fixes ainsi que des expressions analytiques fonction du temps pour les coefficients de l'équation seront établies à partir du modèle présenté ci-dessus. Ceci permettra de produire des simulations qui pourront être analysées.

3.2 La méthode de la moyenne

La méthode de la moyenne est une méthode d'approximation visant à résoudre les équations différentielles ordinaires. En physique, elle se prête particulièrement bien aux traitements des phénomènes oscillatoires. Sa démonstration, ainsi son application sur quelques systèmes oscillatoires particuliers se trouve au sein de la réf. [18].

Cette méthode consiste en une écriture des équations différentielles : il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique à laquelle l'on a rajouté un second membre. Ce second membre est représenté par une fonction $f = f(x, \dot{x}, \epsilon_i)$ pouvant contenir une contribution différentielle du premier ordre ainsi que des termes non-linéaires ou de forçage du système. Les coefficients ϵ_i représentent les différents coefficients sont tous petits devant l'unité. Nous écrivons donc, avec Ω la fréquence propre du système,

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}, \epsilon_i). \quad (3.7)$$

Puis, en met l'équation sous la forme d'un système de deux équations, et en effectuant le changement de variable consistant à introduire y afin de normaliser l'échelle de temps, on a,

$$\dot{x} = \Omega y, \quad (3.8)$$

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{\Omega} = -\Omega x + \frac{\epsilon}{\Omega} f(x, \Omega y, \epsilon_i). \quad (3.9)$$

Il est ensuite nécessaire de changer de coordonnées, et de passer dans un système de représentation polaire (r, θ) et défini par les relations,

$$x = r \cos(\theta), \quad (3.10)$$

$$y = -r \Omega \sin(\theta). \quad (3.11)$$

Enfin, après dérivation de x et de y par rapport au temps, l'isolation des nouvelles variables \dot{r} et $\dot{\theta}$ donne, en introduisant une écriture de la phase $\theta(t) = \Omega t + \phi$,

$$\dot{r} = -\frac{\epsilon}{\Omega} f\left(r \cos(\Omega t + \phi), -r \Omega \sin(\Omega t + \phi), \epsilon_i\right) \sin(\Omega t + \phi), \quad (3.12)$$

$$\dot{\phi} = \Omega - \frac{\epsilon}{r \Omega} f\left(r \cos(\Omega t + \phi), -r \Omega \sin(\Omega t + \phi), \epsilon_i\right) \cos(\Omega t + \phi). \quad (3.13)$$

La méthode de la moyenne stipule ensuite qu'un moyennage de la phase et de l'amplitude approchée, ne possédant pas de dépendance explicite en temps est possible. Dans notre cas, l'évolution temporelle des variables d'amplitude et de phase, regroupés dans un vecteur $\vec{X} = (r(t), \phi(t))$, est donnée en fonction du vecteur \vec{F} contenant les expressions analytiques de r et de ϕ ,

$$\frac{d\vec{X}}{dt} := \epsilon \vec{F}(\vec{X}, \epsilon_i, t), \quad (3.14)$$

$$\frac{d\vec{X}}{dt} \approx \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F}(\vec{X}, \epsilon_i, t) dt. \quad (3.15)$$

Cet exemple d'oscillateur contient un terme dissipatif symbolisé par le coefficient γ , un terme forçage d'amplitude h_f et de pulsation $m(\Omega - \Omega_*) = \omega_f$ ainsi que deux termes non-linéaires en x^2 et x^3 auxquels sont rattachés les coefficients α et β , petits devant les amplitudes des variations de r et de θ . L'équation différentielle du mouvement est,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -2\gamma \dot{x} + \beta x^3 + h_f \cos(\omega_f t + \phi). \quad (3.16)$$

Le système à résoudre s'obtient avec $f(r \cos(\theta), -r\Omega \sin(\theta), \epsilon_i) = -2\gamma \dot{x} + \alpha x^2 + \beta x^3 + h_f \cos(\omega_f t + \phi)$. On a, en tenant compte de la période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ et en notant $\psi = \omega_f t + \phi$,

$$\dot{r} = \frac{-T}{2\pi} \left(-2\gamma r \sin^2(\psi) + \alpha r^2 \cos^2(\psi) \sin(\psi) + \beta r^3 \cos^3(\psi) \sin(\psi) + h_f \cos(\omega_f t + \phi) \sin(\psi) \right), \quad (3.17)$$

$$\dot{\phi} = \frac{-T}{2\pi} \left(-2\gamma r \sin(\psi) \cos(\psi) + \alpha r^2 \cos^3(\psi) + \beta r^3 \cos^4(\psi) + h_f \cos(\omega_f t + \phi) \cos(\psi) \right). \quad (3.18)$$

L'intégration par rapport au temps du système composé des expressions (3.17) et (3.18) mène, après regroupement des différents termes et réduction des expressions au même dénominateur afin d'y faire apparaître la résonance en $\Omega = \omega_f$, à,

$$\int_0^T \frac{\dot{r}}{T} dt = \left(-\frac{\gamma r}{\Omega} \right) + \frac{h_f}{2\pi} \left(\frac{\omega_f \sin(\psi) \sin(\omega_f T) - 2\Omega \cos(\psi) \sin^2(\frac{\omega_f T}{2})}{\Omega^2 - \omega_f^2} \right), \quad (3.19)$$

$$\int_0^T \frac{\dot{\phi}}{T} dt = \left(\frac{-3\beta r^2}{8\Omega} \right) + \frac{h_f}{2\pi r} \left(\frac{2\Omega \sin(\psi) \sin^2(\frac{\omega_f T}{2}) + \omega_f \cos(\psi) \sin(\omega_f T)}{\Omega^2 - \omega_f^2} \right). \quad (3.20)$$

L'équation différentielle moyennée ne dépendant plus explicitement du temps sera alors, en écrivant les deux équations (3.19) et (3.20) sous la forme d'une fonction vectorielle $\vec{F}^0(\vec{y}, \epsilon_i)^2$ telle que définie en (3.14),

$$\vec{F}^0(\vec{y}, \epsilon_i) = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma r}{\Omega} + \frac{h_f}{2\pi} \frac{\omega_f \sin(\psi) \cos(\omega_f T) - 2\Omega \cos(\psi) \sin^2(\frac{\omega_f T}{2})}{\Omega^2 - \omega_f^2} \\ \frac{-3\beta r^2}{8\Omega} + \frac{h_f}{2\pi r} \frac{2\Omega \sin(\psi) \sin^2(\frac{\omega_f T}{2}) + \omega_f \cos(\psi) \sin(\omega_f T)}{\Omega^2 - \omega_f^2} \end{pmatrix},$$

2. La démonstration détaillée de cette expressions se trouve en section 6.3 de l'Annexe.

(3.21)

L'erreur commise par la méthode de la moyenne par rapport à la solution analytique, évaluée avec un oscillateur dissipatif entretenu à la résonance est de l'ordre³ de 10^{-6} .

3.3 Oscillations non-linéaires et autorésonnances de forçage

L'autorésonnance de forçage est un mécanisme d'excitation des oscillateurs non-linéaires qui intervient dans des systèmes oscillatoires entretenus par une force extérieure quasi-périodique dont les amplitudes restent de l'ordre de la perturbation par rapport à celles du système. En effet, si les paramètres du problème restent consau cours du temps, la non-linéarité empêche le système de s'opposer à l'augmentation lente des l'amplitudes lors de l'installation d'un régime de résonance de forçage entre fréquence du système et de la perturbation extérieure. Cependant, si la fréquence de la force excitatrice varie lentement dans le sens du signe de la nonlinéarité, une augmentation en amplitude de la solution de l'oscillateur est possible. Ceci s'explique par l'instauration lente mais durable d'un régime de résonance, cette fois-ci maintenu par le terme non-linéaire (voir réf. [5]).

Considérons un système dont l'équation du mouvement prend x pour variable de position. L'analyse de l'évolution d'un tel système s'effectue à l'aide de méthodes d'approximation des équations différentielles telles que la méthode de la moyenne. Elles consistent en l'introduction d'une écriture de la solution $x(t)$ du système oscillant (voir (3.21)) dont le terme $A(t)$ représente les variations temporelles séculaires de la solution sur les grandes échelles de temps (modulation basse fréquence de l'amplitude), que $\theta(t)$ est relatif aux évolutions rapides, 2π -périodiques, du signal,

$$x(t) = A(t) \cos(\phi(t)). \quad (3.22)$$

La fonction $\vec{F}^0(\vec{y}, \epsilon_i)$ permet de rechercher des points particuliers des systèmes dynamiques, les points fixes. Il s'agit dans notre cas d'un ensemble de couples (A, ϕ) qui, une fois utilisés comme conditions initiales lors de la résolution d'équations différentielles du mouvement, confèrent au système une solution en terme d'amplitude et de phase stationnaire. Pour un oscillateur linéaire à coefficients cons, ces points fixes (voir Tab. 3.3) sont les conditions initiales pour l'évolution stationnaire du système (le portrait de phase correspondant est un point situé en (x_0, \dot{x}_0)). L'obtention des portraits de phase nécessite de convertir les points fixes de (r_0, ϕ_0) à (x_0, \dot{x}_0) en éviles expressions qui possèdent des points . En se basant sur les définitions (3.10) et (3.11), on trouve,

$$x_0 = \frac{r_0}{1 + \tan^2(\phi_0)} = r_0 \cos(\phi_0), \quad (3.23)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{r_0 \Omega \tan(\phi_0)}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi_0)}} = r_0 \Omega \sin(\phi_0). \quad (3.24)$$

3. Voir Annexe 6.3.

Dans le cas d'une autorésonnance paramétrique, ces points se nomment quasi-fixes et permettent de mettre aisément en évidence les variations de l'amplitude dues au phénomène de résonance. Ils s'obtiennent via,

$$\vec{F}^0(\vec{y}, \epsilon_i)(t=0) = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3.25)

Notons enfin que les points fixes pour des systèmes dotés d'un terme de forçage sont déterminés à la résonance. L'expression de $\vec{F}^0(\vec{y}, \epsilon_i)$ tenant compte de cette résonance est déterminée en prenant la limite des composantes du vecteur (3.21) pour $\Omega \rightarrow \omega_f$. La règle de l'Hospital est toute indiquée pour calculer cette limite. Il vient de (3.25) l'expression un point quasi-fixe de notre modèle⁴ :

$$\phi(t) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)}}{\frac{-6\beta(t)A^3(t)}{8h_f(t)}}\right) & \text{si } \left(\frac{\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)}}{\frac{-6\beta(t)A^3(t)}{8h_f(t)}}\right) > 0 \\ \tan\left(\frac{\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)}}{\frac{-6\beta(t)A^3(t)}{8h_f(t)}}\right) + \pi & \text{si } \left(\frac{\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)}}{\frac{-6\beta(t)A^3(t)}{8h_f(t)}}\right) < 0, \end{cases}$$

$$A(t) = -\frac{h(t) \sin(\phi)}{\Omega(t)\gamma}. \quad (3.26)$$

Afin de déterminer A(t) pour un temps donné, on isole $\phi(t)$ à partir du système (3.25) avant de l'injecter dans l'une des deux expressions du système non-linéaire en A(t). De manière équivalente, l'amplitude de la solution provient de la résolution numérique d'une des expressions suivantes,

$$A(t)\gamma + \frac{h_f(t)}{8h_f(t)} \sin\left(\tan\left(\frac{\frac{-2A(t)\gamma}{h_f(t)}}{\frac{-6A^3(t)\beta(t)}{8h_f(t)}}\right)\right) = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{3A(t)\beta(t)}{8\Omega(t)} + h_f \cos\left(\tan\left(\frac{\frac{-2A(t)\gamma}{h_f(t)}}{\frac{-6A^3(t)\beta(t)}{8h_f(t)}}\right)\right) = 0. \quad (3.28)$$

4. Voir explication en fin de l'Annexe 6.4 : il faut tenir compte de la dépendance temporelle des coefficients

Termes	Equation différentielle	Points fixes
Oscillateur H.	$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$	(r_0, ϕ_0)
Oscillateur H., β	$\ddot{x} + \Omega^2 x = \beta x^2 + h_f \cos(\omega_f t)$	$\left(\left(\frac{4h_f}{3\beta} \right)^{\frac{1}{4}}, \pm\pi \right)$
Oscillateur H., γ	$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = h_f \cos(\omega_f t)$	$\left(\frac{h_f}{2\Omega\gamma}, \pm\frac{\pi}{2} \right)$
Oscillateur H., β, γ	$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = \beta x^2 + h_f \cos(\omega_f t)$	$\left(-\left(\frac{h_f \sin(\tilde{\phi})}{2\Omega\gamma} \right), \tilde{\phi} \right)$

TABLE 3.2 – Quelques points fixes obtenus à partir de la méthode de la moyenne pour différentes versions du système oscillant (harmonique, dissipatif, non-linéaire quadratique et forcé à la résonance). Le tilde sur la quantité $\tilde{\phi}$ indique que sa valeur s'obtient nécessairement de manière numérique.

Un exemple d'autorésonnance (il s'agit ici d'une autorésonnance paramétrique, c'est-à-dire d'entretien d'un régime de résonance par modification de la fréquence propre d'un système, mais sans perturbation extérieur) est donné en Fig. 3.1. Il s'agit d'un oscillateur de Mathieu muni d'un terme cubique dont la fréquence propre est modulée dans le temps de manière idéale par un terme de pulsation ω_p (voir équation (3.28)),

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \Omega_0^2(t) \left(1 + h_p \cos(\omega_p(t)t) \right) x(t) = \beta(t)x^3(t). \quad (3.29)$$

On y retrouve la lente augmentation de l'amplitude au cours du temps, signe de l'entrée en résonance. Les évolutions 2π -périodiques rapides dues au terme de Mathieu ne sont pas résolues sur la Fig. 3.1. La courbe verte représente l'approximation globale de l'amplitude, issue des équations moyennées (voir réf [12] pour l'obtention de l'expression (3.30)),

$$A(t) = \frac{2}{3}\Omega_* \sqrt{\frac{1}{\beta} \left(\frac{v_0 t}{r_0} + \frac{h_p}{6} \right)}. \quad (3.30)$$

3.4 Evolutions des paramètres du modèle en fonction du temps

Le système physique que nous considérons est constitué d'une particule test placée dans un potentiel gravitationnel central et qui traverse le disque d'accétion pour tomber sur l'objet compact. L'évolution de la position de la particule est régie par un ensemble d'équations paramétriques $(r(t), z(t))$ où r représente la disau centre de l'objet accrétet z la position dans

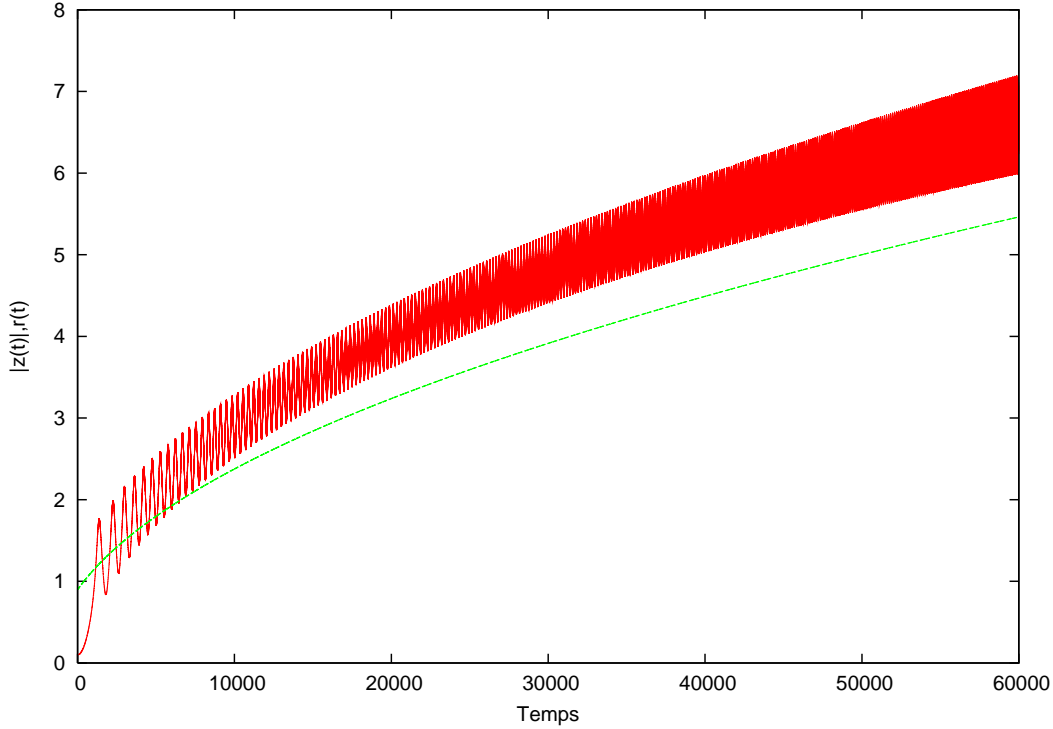


FIGURE 3.1 – Amplitude $|z(t)|$ d'un système en résonance paramétrique (rouge) avec illustration de la méthode de la moyenne pour les variations de l'amplitude $A(t)$ de la solution (vert). Exemple d'un oscillateur de Mathieu non-linéaire.

la direction perpendiculaire au disque. Les variations de $r(t)$ sont non-linéaire en raison de la densité surfacique de masse (voir réf.[12]), que celle de z est de nature oscillatoire (se reporter à l'équation (3.6)).

Les quantités qui déterminent la trajectoire selon la direction z , et que l'on retrouve sous forme de coefficients dans l'équation différentielle (3.2), sont sujet a des évolutions de nature temporelle. En effet, si l'on considère un flux de particules du disque s'effondrant sur l'objet compact, alors la conservation de la masse à un rayon donné, dans le référentiel solide du disque de densité $\rho(r)$, en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) et selon le sens opposé à la direction \vec{e}_r ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r) + \vec{\nabla} \cdot (\rho(r) \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho(r) v_r) = 0. \quad (3.31)$$

En supposant que le disque d'accrétion est un disque mince de densité surfacique de masse indépendante du temps (voir réf. [12]), donnée par une loi de puissance du type,

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha; \alpha \neq 2. \quad (3.32)$$

On a, avec r_0 le rayon d'introduction avec la vitesse v_0 de la particule dans le disque,

$$\frac{\partial}{\partial r} (r 2\pi \Sigma(r) v_r) = \frac{\partial}{\partial r} (r_0 2\pi \Sigma(r_0) v_{r_0}) = 0. \quad (3.33)$$

Soit une écriture de la conservation de la masse,

$$r2\pi\Sigma(r)v_r = r_02\pi\Sigma(r_0)v_{r_0}. \quad (3.34)$$

Ceci nous amène à une paramétrisation de la projection de la trajectoire de la particule sur la surface du disque en fonction du temps. Les différents paramètres dont sont tributaires les mouvements épicycliques sont tous fonctions de $r(t)$. Nous trouvons, avec l'expression de la disau rayon $r(t)$ (avec $\alpha \neq 2$),

$$r(t) = \left(r_0^{\alpha+2} - (\alpha + 2)r_0^{\alpha+1}v_0t \right)^{\frac{1}{\alpha+2}}. \quad (3.35)$$

D'où,

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{GM_\star}{r^3(t)}}, \quad (3.36)$$

$$\kappa_z(t) := \Omega(t) = \sqrt{\frac{GM_\star}{r^3(t)}}. \quad (3.37)$$

L'expression de l'amplitude du terme de forçage est déterminée via la seconde loi de Newton appliquée à l'objet de masse M_\star sur la particule de masse m . Le caractère perturbatif du terme dont $h_f(t)$ constitue l'amplitude est assuré par l'introduction de manière ad hoc d'un scalaire $\epsilon \ll 1$,

$$h_f(t) = \epsilon \left\| \frac{\vec{F}_g}{m} \right\| = \epsilon \frac{GM_\star}{r^2(t)}. \quad (3.38)$$

Le coefficient cubique est obtenue par identification en perturbant de z la composante verticale de la force représentative de l'interaction gravitationnelle. D'où, avec Φ le potentiel gravitationnel défini en (3.1),

$$\ddot{z} = \vec{g} \cdot \vec{e}_z = g_z = -\vec{\nabla}(\Phi) \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial z} \frac{GM_\star m}{\sqrt{r^2(t) + z^2}}. \quad (3.39)$$

En se souvenant que la variable z joue le rôle d'une perturbation, donc qu'elle tolère la comparaison $z \ll r(t) \forall t$, on peut effectuer un développement limité du potentiel gravitationnel au premier ordre,

$$\ddot{z} = -\frac{GM_\star z}{r(t)^3} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{-3/2} \approx -\frac{GM_\star z}{r(t)^3} \left(1 - \frac{3z^2}{2r^2(t)} \right), \quad (3.40)$$

$$\ddot{z}(t) + \Omega^2 z(t) = \left(\frac{3\Omega^2}{2r^2(t)} \right) z^3(t). \quad (3.41)$$

D'où :

$$\beta(t) = \frac{3\Omega^2}{2r^2(t)}. \quad (3.42)$$

Ces expressions (3.35) à (3.42) sont ensuite injectées dans l'équation (3.6). Une équation différentielle définitive du mouvement verticale de la particule, qu'il faudra adimensionner avant d'intégrer numériquement est ainsi obtenue,

$$\ddot{z}(t) + z(t) \left(\frac{GM_\star}{r^3(t)} \right) = z^3(t) \left(\frac{3GM_\star}{2r^2(t)} \right) + \epsilon \left(\frac{GM_\star}{r^2(t)} \right) \cos(m \left(\left(\frac{GM_\star}{r^3(t)} \right)^{(1/2)} - \Omega_\star \right)). \quad (3.43)$$

Chapitre 4

Résultats et interprétation

4.1 Nature des données relatives à l'objet 4U1636-536

Il convient à présent de comparer le modèle présenté en section 2.1 aux observations astronomiques. Pour ce faire on confronte les simulations de la trajectoire $z(t)$ aux résultats de D.Barret et al. (voir réf. [2]). Dans cette étude, l'auteur explore le lien entre baisse du facteur de qualité d'un QPO au-delà d'une certaine fréquence d'émissions X chez les binaires de faible masse. Il conclut, après un examen détaillé du système 4U1636-536 que cette tendance peut être interprétée comme une signature de l'ISCO, ce qui constituerait la première preuve de relativité générale en champ fort. Il conjecture enfin que cette tendance doit se retrouver pour les autres binaires du même type. L'ensemble des données qui servent à cette démonstration sont issues des archives du satellite Rossi X-Ray Timing Explorer (RXTE).

L'objet 4U1636-536 est la quatrième LMXB découverte au sein de la Voie Lactée. Il s'agit d'un système double dont la composante accrète une étoile à neutron de masse M comprise entre 1.4 à 2 M_{\odot} . Sa fréquence de rotation intrinsèque est estimée à 582 Hz. Une discussion de cette valeur a cependant vu le jour dès 1999 (voir réf [6]), lui prédisant une fréquence inférieure, de l'ordre de 291 Hz. Ces valeurs fluctuant du simple au double peuvent s'interpréter comme un discussion de l'inclinaison du plan équatorial par rapport à l'observateur. En effet si l'objet accrépède deux pôles actifs et que son axe polaire est perpendiculaire à la ligne de visée, deux signaux relatifs à la rotation de l'étoile se moduleront et donneront une valeur de Ω_{\star} doublé par rapport à la réalité. Le taux d'accrétion de 4U1636-536 est celui d'une LMXB s, soit $\dot{M} \approx 10^{-8} M_{\odot}.an^{-1}$. Cet objet possède surtout un QPO aux alentours de 870 Hz (voir réf [19]). La découverte ainsi que l'étude détaillée de ce QPO particulier est relativement récente puisqu'elle date de l'année 1996. C'est enfin 4U1636-536 qui a mis à jour le comportement particulier du facteur de qualité des émissions X des LMXB, vérifié depuis pour d'autres systèmes doubles de la galaxie. L'évolution des facteurs de qualité des pics de la transformée de Fourier de sa lumière X (voir Fig. 4.1) sert de référence à la branche théorique de la communauté qui étudie les QPOs. C'est cette courbe que l'on souhaite reproduire numériquement.

L'analyse du signal s'effectue de la même manière que celle employée par les observateurs : les données (la simulation de $z(t)$ dans notre cas) est découpée en fenêtres au sein desquelles les informations sont converties de l'espace direct ($z(t),t$) dans l'espace des fréquences ($\mathcal{F}(f),f$). Les données RXTE sont analysées à l'aide d'une méthode de fenêtrage variable.

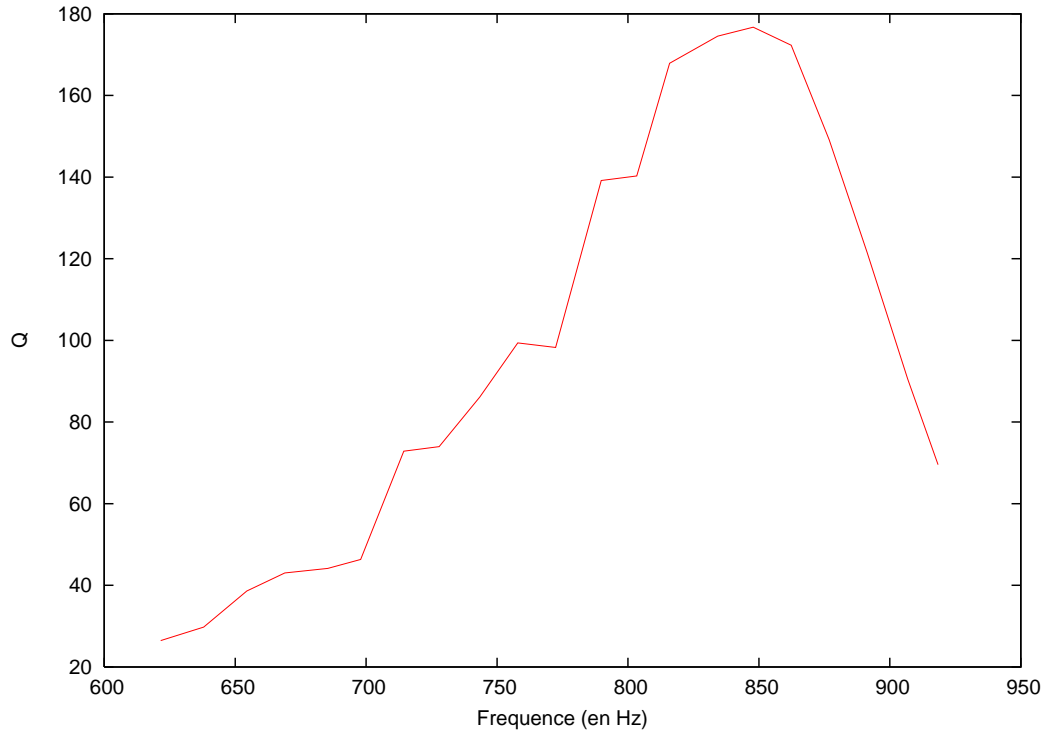


FIGURE 4.1 – Evolution du facteur de qualité Q du QPO à 850 Hz environ de 4U1636-536 en fonction de sa fréquence (voir réf [2]).

Les observations sont découpées par D.Barret en tranches allant de 8 à 512 s. Pour chacun de ces intervalles de temps successifs, la transformée de Fourier discrète du signal $f(t)$, définie par l'expression (4.1) est effectuée. Un facteur de qualité est ensuite tiré de chaque transformées. Les facteurs sont par la suite moyennés pour une fréquence donnée,

$$\mathcal{F}(f_j) := \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} f(t_j) e^{2i\pi f \Delta t}. \quad (4.1)$$

L'algorithme choisi pour réaliser la transformée des simulations est celui de la transformée de Fourier rapide (voir réf.[15], qui possède l'avantage d'optimiser le temps de calcul d'un signal disponible sur n valeurs discrètes de $O(n^2)$ à $O(n \ln(n))$ itérations.

La transformée de Fourier relative aux fenêtres décrites précédemment est élevée au carré, donnant ainsi accès à la densité spectrale de puissance de la transformée de Fourier. Les grandeurs rendant compte du signal au sein d'une période d'étude de la simulation sont tout d'abord la fréquence f_0 du maximum du pic de l'intensité de la transformée de Fourier $I := |\mathcal{F}(f)|^2$, correspondant à la première harmonique de la décomposition en série de Fourier de la simulation. Ce pic principal est identifié et interpolé linéairement afin d'en extraire la fréquence f_0 correspondant au maximum de ce pic ainsi que le facteur de qualité Q définie en (4.2) avec f_1 et f_2 les fréquences de demi-intensité du pic montrant son maximum à f_0 . La différence $|f_2 - f_1|$ constitue la largeur à mi-hauteur du pic,

$$Q = \frac{f_0}{|f_2 - f_1|}. \quad (4.2)$$

La représentation graphique de l'ensemble des doublets $(f_0, Q(f_0))$ obtenus sur l'ensemble de la simulation constitue alors le résultat qui permettra de se prononcer, au regard des observations, sur le modèle étudié. Notons que les quantités Q et f_0 sont calculés à partir d'une transformée normalisée.

4.2 Simulation de l'accrétion d'une particule par une étoile à neutrons

Pour des raisons d'optimisation et de flexibilité du programme, il est nécessaire de normaliser les grandeurs simulées. On choisi de ramener les différentes fréquences du problème à la fréquence du disque Ω_g évaluée au rayon gravitationnel R_g ,

$$\Omega_g = \frac{c^3}{GM_\star} = \sqrt{\frac{GM_\star}{R_g^3}} = 1. \quad (4.3)$$

Les coefficients d'additionnement par les dimensions de longueur, de temps ainsi que la vitesse sont le rayon gravitationnel de l'astre R_g , la période T_g de la particule au rayon R_g , ainsi que la célérité de la lumière dans le vide. Ils entretiennent entre eux la relation suivante,

$$c \times T_g = R_g. \quad (4.4)$$

On en tire l'équation normalisée du problème, avec x_t , $x(t=0) = x_0$ et τ les longueurs et temps normalisés, et $\beta_0 = v/c$. En posant,

$$r(t) = \left(r_0^{\alpha+2} - (\alpha+2)r_0^{\alpha+1}v_0t \right)^{\frac{1}{\alpha+2}}, \quad (4.5)$$

on obtient,

$$\ddot{z}(\tau) + z(\tau) \left(\frac{1}{x^3(\tau)} \right) = z^3(\tau) \left(\frac{3\Omega^2(\tau)}{2x^2(\tau)} \right) + \epsilon \left(\frac{1}{x^2(\tau)} \right) \cos \left(m \left(\frac{1}{x^{3/2}(\tau)} \right) - \Omega_\star x^3(\tau) \right), \quad (4.6)$$

Les simulations que l'on peut effectuer à partir de l'expression (4.6) sont dépendantes d'un ensemble de paramètres. Il s'agit des conditions initiales relevant de la physique de l'objet étudié (rayon et vitesse r_0 , v_0 d'introduction de la particule dans le disque, coefficient de dispersion γ , position et vitesse z_0 et \dot{z}_0 de la particule selon la direction perpendiculaire au disque) et du mode m du développement du potentiel. De plus, la simulation est effectuée en raccordant des intervalles de calcul d'une durée τ_f comporN1 points de mesures, chacun disde $\Delta t = \tau_f/N1$.

La transformée de Fourier est ensuite effectuée avec un procédé de fenêtrage similaire : un temps d'analyse du signal se voit déterminé par le paramètre $\tau_{Fenetre}$. Il s'agit donc d'une évaluation sur $N2=\tau_{Fenetre}/\Delta t$ points. Notons que $\tau_{Fenetre}$ définit la fréquence d'échantillonnage du signal $z(t)$, et doit de ce fait vérifier le théorème de l'échantillonnage de Nyquist-Shannon. La résolution en fréquence est ainsi donnée par,

$$\Delta\nu \leq \frac{1}{2\tau_{Fenetre}}. \quad (4.7)$$

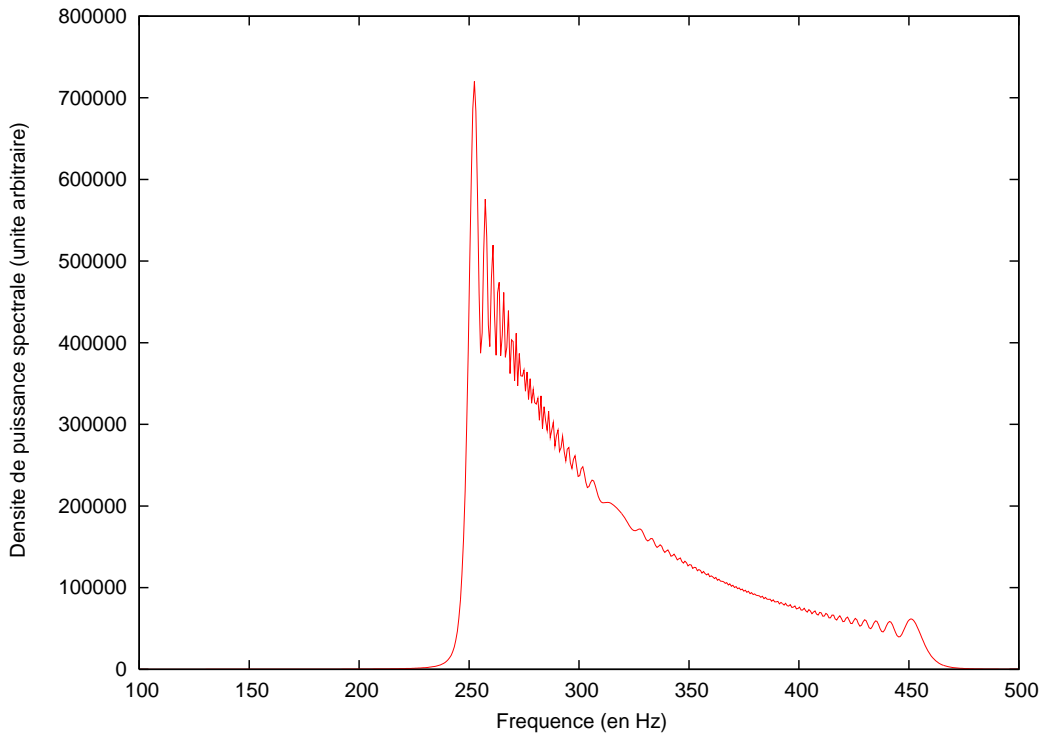


FIGURE 4.2 – Détail d'une densité de puissance spectrale du signal effectuée sur une trop grande fenêtre au regard du gradient de fréquence que présente le signal (lorsque la particule approche de l'ISCO), et avec un pas en fréquence ($\Delta\nu=9.54\times 10^{-7}\nu_g$) trop grand pour résoudre le spectre en une succession de pics resserés : il en résulte un facteur de qualité Q faussé (conditions initiales : $r_0=50 R_g$, $v_0/c = 10^{-6}$ (gauche) et $v_0/c = 10^{-5}$ (droite) , $\gamma=10^{-6}$, $\tau_{Fenetre} = 524288\times T_g$).

La grande difficulté de la reproduction de la courbe issue des observations RXTE tient dans le caractère variable du fenêtrage employé afin de calculer les facteurs de qualité Q. En effet, cette suite de points a été obtenue (voir réf. [6]) en superposant des couples ($Q>30, f_0$) calculés sur des échantillons variables de segments de données. Ainsi, les facteurs de qualité ne sont directement comparables entre eux qu'à la condition qu'ils soient issus d'un même balayage des données. Ils doivent seulement être interprétés comme une mesure du nombre de périodes du signal X qui se trouve dans une fenêtre temporelle à partir de laquelle est effectuée la transformée de Fourier. Les différentes plages sont des multiples de deux exprimés en secondes, soit 8s pour la plus courte et 512s pour la plus longue.

Il en va de même pour la fréquence du maximum de la densité spectrale de puissance f_0 , qui est rattachée à un effet supplémentaire. En effet, le calcul de la k-ième ($k>0$) transformée

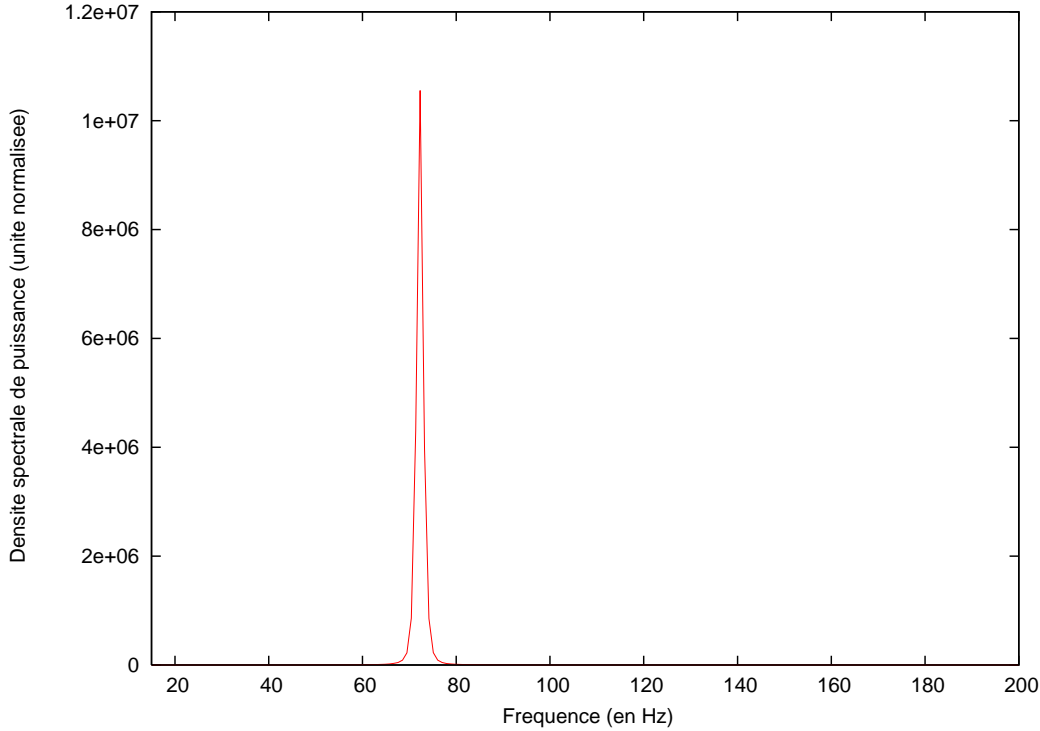


FIGURE 4.3 – Détail d'une densité de puissance spectrale du signal effectuée sur une petite fenêtre temporelle capable d'isoler une seule composante du spectre, et au sein de laquelle la fréquence ne varie pas trop (lorsque la particule débute sa chute vers l'objet compact). Le pas en fréquence est suffisamment petit ($\Delta\nu=9.54\times 10^{-7}\nu_g$) pour résoudre le spectre en pic de Dirac : il en résulte un bon facteur de qualité Q (même conditions initiales et même pas de temps $\Delta t=0.5T_g$ qu'en Fig. 4.2, mais avec $\tau_{Fenetre} = 8192\times T_g$).

de Fourier est évalué à partir du segment de signal $z(t) \in [\tau_k, \tau_{k+1} = \tau_k + \tau_{Fenetre}]$, que l'algorithme FFT va concaténer un grand nombre de fois avant d'en extraire les coefficients relatifs aux différentes harmoniques. Ce segment de données simulées est donc la convolution du signal quasi-périodique X avec une fonction porte $\Pi(\tau_{Fenetre}, z_k^m)$, d'une largeur $\tau_{Fenetre}$ en temps, centrée en son milieu $z_k^m = \tau_k + \tau_{Fenetre}/2$ et comportant N_2 points $(\tau, z(\tau))$. Il s'agit donc, et sur N_2 points également, d'évaluer,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(z(\tau_j) \star \Pi(\tau_{Fenetre}, z_k^m) \right) e^{2i\pi\nu_j \Delta t} \propto \left(\frac{N_2\pi(\nu_j \pm \nu_0)}{2} \right), \quad (4.8)$$

$$\Delta\nu_j \propto \frac{\nu_j}{N_2}. \quad (4.9)$$

Ainsi, la transformée de Fourier sera un cardinal centrée sur la composante principale du signal dans le spectre et dont la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ de l'oscillation centrale est proportionnelle à l'inverse du nombre de périodes N_2 comprises dans la fenêtre $\tau_{Fenetre}$ (voir équation (3.9) et réf [2]). Un grand N_2 donnera une transformée qui tend vers un pic de type Dirac, dont le facteur de qualité pourra aisément se calculer, pour peu qu'il soit suffisamment résolu en fréquence (c'est-à-dire que le pas en fréquence $\Delta\nu$ soit suffisamment

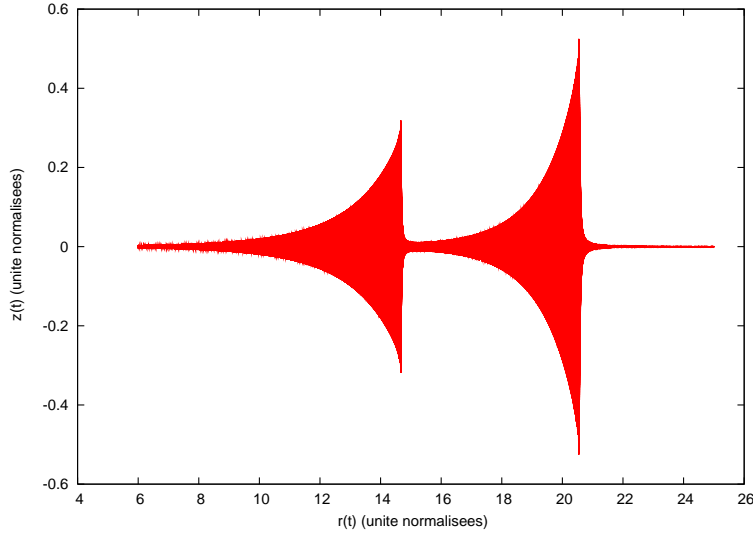


FIGURE 4.4 – Simulations du signal X de la particule (conditions initiales : $r_0=50 R_g$, $v_0/c = 10^{-6}$ (gauche) et $v_0/c = 10^{-5}$ (droite) , $\gamma=10^{-6}$, $\Delta t=0.375 T_g$) affichées sur la fenêtre $[6,25] R_g$.

petit). Ceci est réglable de manière relativement facile si la pulsation du signal demeure consurr la durée $\tau_{Fenetre}$, comme en début de simulation. Cependant, lorsque les premières résonances se font sentir, le nombre de périodes comprises dans une fenêtre augmente. Pour une fenêtre donnée, l'information contenue est plus grande et le nombre d'harmoniques calculés d'auplus impor, pour la résolution Δ_ν . Par conséquent, la multitude de pics des transformées des segments à haute fréquence se voit lissée (voir Fig. 4.2), et la fréquence du maximum du pic principale faussée par rapport au facteur de qualité correspondant.

Les conditions initiales choisies afin de lancer les simulations sont les suivantes : la particule est lâchée à une disdu centre de l'objet compact de $r_0=50R_g$, avec une vitesse $v_0/c = 10^{-5}$. Les simulations sont le produit par concaténation de segments de $400 \times T_g$ de durée normalisée comporN1=800 points chacun. Ces paramètres responsables d'un pas de temps $\Delta_t = 0.5 \times T_g$ sont ajustés de manière à résoudre le signal avec, en moyenne, une dizaine de points par période lorsque le système oscille à hautes fréquences. La fenêtre de calcul du spectre est telles que l'intervalle $\tau_{Fenetre} \times T_g$ contienne au minimum 170 périodes. Le paramètre perturbatif γ , responsable de la dissipation est de 10^{-6} . Quelques simulations d'essai invite à prendre un paramètre $\epsilon=10^{-4}$ dans l'expression de l'amplitude du terme de forçage h_f .

La forme du signal intégré numériquement se trouve en Fig. 4.6. L'augmentation des amplitudes est en accord avec les rayons vérifiant la condition de désonnance (3.5), reportée dans le Tab. 4.2, soit environ $18.46 R_g$ pour le mode $m=1$ et une pulsation $\Omega_K=\Omega_\star/2$. On peut noter que l'analyse des spectres de Fourier pour chacun des modes $m=1, 2$ ou 3 ne permet pas de retrouver le pic jumeau à 850 Hz (voir Fig.2.2). Le modèle va dans le sens

Mode m	1	2	2	3	3
Vitesse orbitale Ω_K (en Ω_*)	1/2	2/3	1/2	3/4	3/2
Fréquence de l'étoile à neutron (en Hz)	582	582	582	582	582
Rayon de résonance (en R_g)	18.46	15.23	18.46	14.08	8.87
Fréquence de l'étoile à neutron (en Hz)	270	270	270	270	270
Rayon de résonance (en R_g)	30.80	25.42	30.80	23.50	14.80

TABLE 4.1 – Conditions de résonance de forçage en fonction de la valeur de la pulsation intrinsèque de l'objet accrété.

de l'interprétation de ce pic en qu'effet statistique au lieu de le considérer comme un pic physique.

L'interprétation physique des simulations issues du modèle se résume ainsi : une particule est lâchée dans les régions externes du disque d'accrétion d'une LMXB, aux alentours de $R=50R_g$. Par gravité, le corps dérive en spiralant sur des orbites qui vont en se restreignant vers l'étoile à neutrons. Le mouvement épicyclique verticale de la particule est tout d'abord modulé par la composante différentielle du premier ordre en $2\gamma z$ lors d'un régime transitoire. Une première augmentation linéaire de l'amplitude verticale des oscillations voit le jour en raison de la forme particulière de la solution de l'oscillateur dissipatif forcé (voir Annexe 6.2). Ensuite, le disque perd en épaisseur et la dissipation se fait moins sentir. Un mécanisme d'auto-résonance s'instaure : le terme non-linéaire modifie progressivement la fréquence propre $\Omega_K(t)$ de la particule, et le système s'adapte pour conserver une symétrie de phase entre $\Omega_K(t)$ et l'un des modes du potentiel gravitationnel. En fonction de la vitesse radiale initiale du corps, l'amplitude peut ensuite baisser, mais le système reste en phase avec la composante excitatrice extérieur, ce qui peut conduire à un deuxième pic de l'amplitude. L'analyse des simulations dépend fortement de la fenêtre temporelle et des résolutions Δt et $\Delta\nu$ employées pour effectuer leur traitement.

On choisi à présent de suivre les évolutions en fonction de la fréquence du maximum des facteurs de qualité (voir Fig. 4.6) obtenus lors d'analyse différant par le fenêtrage d'une même simulation. En effet, un grand facteur de qualité est la signature d'une transformée de Fourier constituée d'un pic principal et donc d'une fenêtre de calcul sur laquelle le gradient de fréquence est faible (il peu s'agir d'une grande fenêtre couvrant de grandes périodes, ou bien d'une petite fenêtre couvrant de petites périodes). Il est nécessaire de couvrir plusieurs dizaines de périodes correctement résolues afin d'obtenir un Q satisfaisant. De ce fait, les facteurs de qualité calculés aux hautes fréquences avec une fenêtre trop grande seront ignorés (leur grande largeur à mi-hauteur les place en-dessous de ceux calculés avec un fenêtrage plus petit). Réciproquement, les facteurs obtenus aux basses fréquences pour une petite fenêtre contiennent peu de périodes, ce qui engendre un Q petit, supplanté par ceux calculés avec des fenêtres plus grandes.

Le caractère décroissante de la courbe du maximum de facteur de qualité de la Fig. 4.6 est le contraire de ce que nous souhaitons reproduire numériquement. Ces variations se retrouvent pour l'ensemble des courbes de maximum du facteur de qualité réalisée avec différentes simulations, dont la seule différences consiste en la valeur de la vitesse radiale initiale v_0 (voir Fig. 4.7). Ceci peut se comprendre ainsi : la particule test lâchée dans le champ de Schwarzschild possède une accélération positive entre de rayon initial de la simulation et l'ISCO, borne temporelle supérieur de l'intégration des équation du mouvement

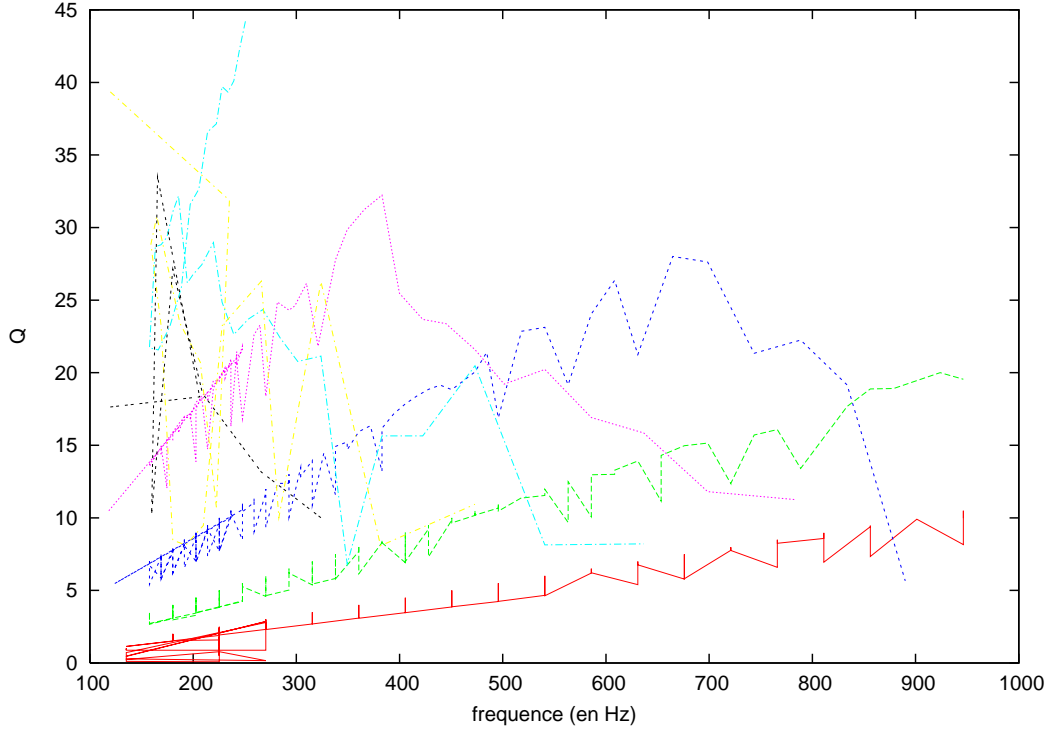


FIGURE 4.5 – Facteur de qualité Q en fonction de la fréquence f_0 du maximum de la densité spectrale de puissance (conditions initiales : $r_0=25 R_g$, $z(0)=0.0 R_g$, $\gamma=10^{-6}$, $\Delta t=0.375 T_g$, $\Delta\nu=1/(2\tau_{Fenetre})\nu_g$, représenté pour différent fenêtrage (rouge : $\tau_{Fenetre}=4096\times T_g$, vert : $\tau_{Fenetre}=8192\times T_g$, bleu foncé : $\tau_{Fenetre}=16384\times T_g$, violet : $\tau_{Fenetre}=32768\times T_g$, jaune : $\tau_{Fenetre}=65536\times T_g$, bleu clair : $\tau_{Fenetre}=131072\times T_g$, brun : $\tau_{Fenetre}=131072\times T_g$).

(physiquement, elle continue sa tombée sur l'objet compact et atteint une vitesse égale à c à hauteur du rayon de Schwartzschild R_S). La fréquence propre du système augmente avec le rayon $r(t)$, la particule passe plus de temps dans les régions du disque où sa période est grande, donc sa transformée de Fourier possède un pic principal (qui sera correctement résolu si N_1 est assez grand¹), puis traverse de plus en plus rapidement les régions internes du disque, dans lesquelles sa période augmente et sa fréquence diminue. Pour les raisons illustrées en Fig. 4.2 et 4.3, les facteurs de qualité seront plus faibles. Notons que ces simulations ont été effectuées avec un disque présentant une densité surfacique massique constante en fonction de $r(t)$ ($\alpha=0$, voir équation (3.32)). Il est possible d'améliorer le modèle de génération des QPOs en considérant cette fois-ci une densité de matière élevée aux petits rayons, soit un $\alpha<0$. Une vitesse (l'expression au sein du modèle est reporté en (4.10)) diminuant avec le rayon se justifie physiquement par les phénomènes de pression, de chocs et de transferts radiatifs subis par le plasma accrété dans la région centrale du disque,

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = -r_0^{\alpha+1} v_0 r(t)^{-(1+\alpha)} = -v_0 \left(\frac{r_0}{r(t)} \right)^{(1+\alpha)}. \quad (4.10)$$

Les capacités des machines employées imposent un exposant $\alpha \leq -2.3$. En effet, si la

1. On compte une quinzaine de points par périodes pour être certain de résoudre la transformée de Fourier d'une manière qui soit satisfaisante

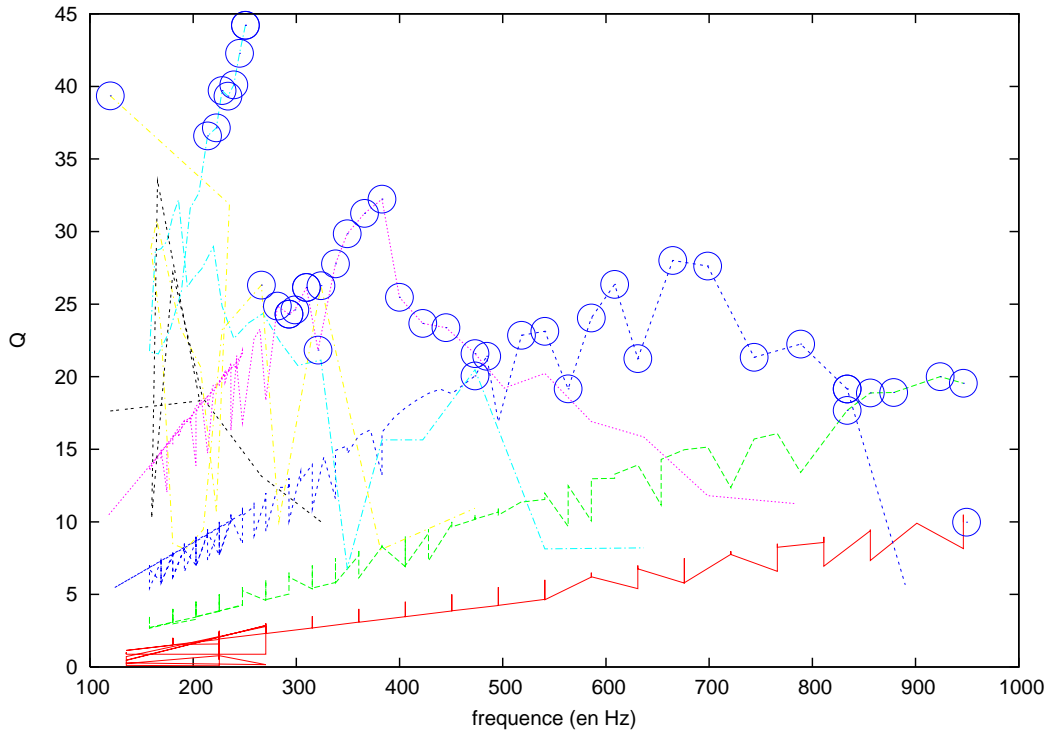


FIGURE 4.6 – Facteur de qualité Q en fonction de la fréquence f_0 du maximum de la densité spectrale de puissance. Le maximum des facteurs obtenus avec les différents fenêtrages est représenté en fonction de la fréquence du maximum de l'intensité du spectre de Fourier par les cercles bleus (conditions initiales : $r_0=25 R_g$, $z(0)=0.0 R_g$, $\gamma=10^{-6}$, $\Delta t=0.375 T_g$, $\Delta\nu=1/(2\tau_{Fenetre}\nu_g)$), représenté pour différent fenêtrage (rouge : $\tau_{Fenetre}=4096\times T_g$, vert : $\tau_{Fenetre}=8192\times T_g$, bleu foncé : $\tau_{Fenetre}=16384\times T_g$, violet : $\tau_{Fenetre}=32768\times T_g$, jaune : $\tau_{Fenetre}=65536\times T_g$, bleu clair : $\tau_{Fenetre}=131072\times T_g$, brun : $\tau_{Fenetre}=131072\times T_g$).

vitesse de chute ralentie trop lentement, le temps de calcul devient gigantesque. Ainsi, si l'on souhaite obtenir les résultats dans un délai raisonnable (24h maximum), il est judicieux de choisir $\alpha=-3$. Les résultats sont reportés en Fig.[4.8]. La courbe $Q(f_0)$ présente la monotonie croissante que l'on attendait, tout en resattachée des variations de Q aux faibles fréquences, lors du début de l'intégration, ainsi que d'un certain nombre facteurs de qualité anormalement bas pour des fréquences $f_0 > 800\text{Hz}$. Ces points (Q, f_0) posent des questions quant à la robustesse des méthodes et des programmes qui les génèrent. La méthode numérique de résolution des équations différentielles employées est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5. Bien qu'à l'origine de dégradation de la valeur du moment cinétique des systèmes conservatifs, elle ne peut être mise en cause puisque le problème gravitationnel à deux corps de la LMXB n'est pas résolu. Elle serait néanmoins à remplacer par une méthode de type symplectique si l'on désire résoudre en trois dimension la trajectoire de la particule. Un calcul de la fonction (Q, f_0) pour un signal $f(t)=\sin((\Omega_0+\Omega_1t)t)$ avec ($\Omega_1 \ll \Omega_0$) renvoie une courbe avec les mêmes biais que ceux de la Fig.[4.8], au lieu d'un alignement strictement monotone croissant de pics de Dirac vers les hautes fréquences. Ceci invite à interpréter ces erreurs comme issues de l'interpolation linéaire des pics du spectre lors du calcul des facteurs Q . Peuvent être en cause l'ordre de la méthode d'interpolation employé, mais aussi la résolution en fréquence des pics. Cette dernière hypothèse soulève en conséquence la question de l'optimisation du programme, très coûteux en mémoire dans

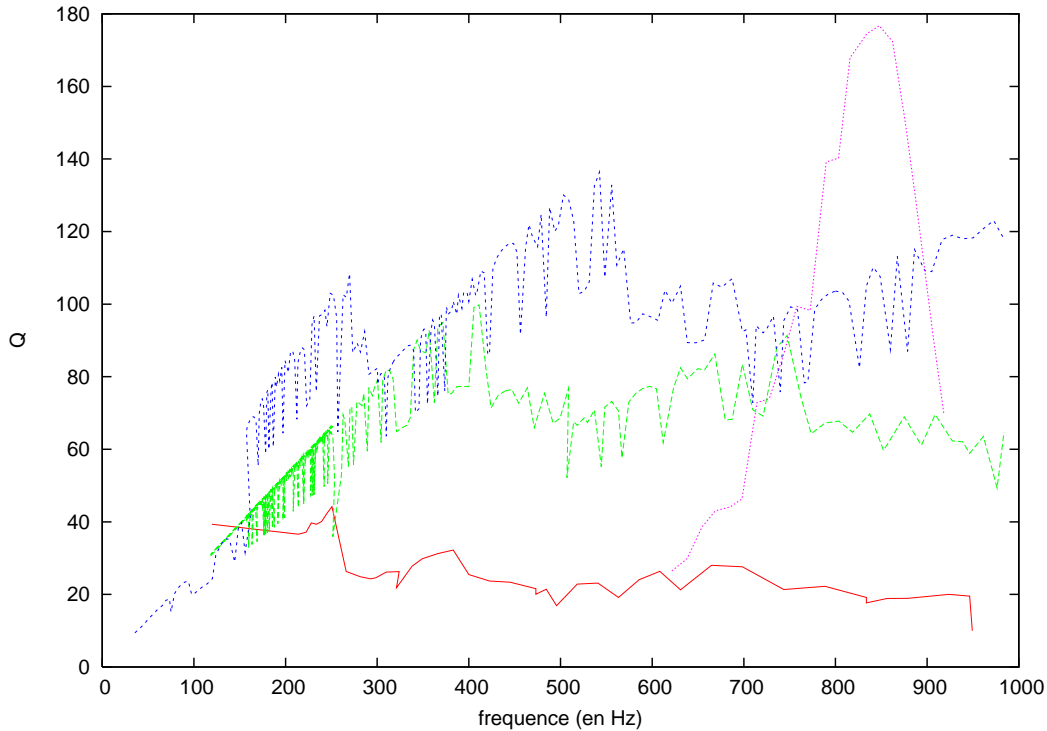


FIGURE 4.7 – Evolution du maximum des facteurs de qualité à chaque fréquence en fonction de la fréquence du maximum du spectre de puissance de la transformée de Fourier pour différentes vitesses radiales v_0 initiales (rouge : $v_0/c = 10^{-4}$, vert $v_0/c = 10^{-5}$, bleu : $v_0/c = 10^{-6}$, rose : courbe observationnelle (voir réf. [2])).

sa version actuelle.

L'implémentation de ce modèle contient deux paramètres fondamentaux qui déterminent les caractéristiques de la LMBX dont on simule l'accrétion : la masse et de la pulsation de la rotation intrinsèque de l'étoile à neutron. Il n'est pas nécessaire de tenir compte de la période de la rotation du compagnon, négligeable devant celle de l'objet compact. En revanche, en sachant la valeur observationnelle de la fréquence de l'orbite de la particule à l'ISCO est de $\nu_{ISCO}=1571$ Hz et que des simulations qui faisant varier la masse de l'étoile de $M=1.4$ à $2 M_{\odot}$ donne des valeurs de ν_{ISCO} proche d'environ 1550 à 1580 Hz, on peut conclure que le modèle est cohérent avec les estimations actuelles de la masse des étoiles à neutrons.

L'application de la méthode de la moyenne à l'oscillateur non-linéaire dissipatif entretenu qui décrit le mouvement épicyclique vertical de la particule pose un dernier problème. Cette méthode a été au préalable essayée avec succès sur différents oscillateurs mêlant terme harmonique, dissipatifs, non-linéaire, oscillateurs de Van der Pol ou encore de Mathieu. Elle permet d'avoir accès à une expression explicitement indépendante du temps de l'amplitude $A(t)$ de leur solution, et de trouver des expressions analytiques aux points fixes en amplitude et en phase qui laissent le système évoluer de manière stationnaire s'ils sont pris comme conditions initiales du problème. Pour, l'introduction du terme de forçage dans l'équation différentielle ne permet plus à la méthode de la moyenne de rendre compte des variations de l'amplitude des oscillations (Fig. 4.9), que l'on évalue cette amplitude hors ou bien en condition de résonance entre la force excitatrice et le système. Il en va de même pour

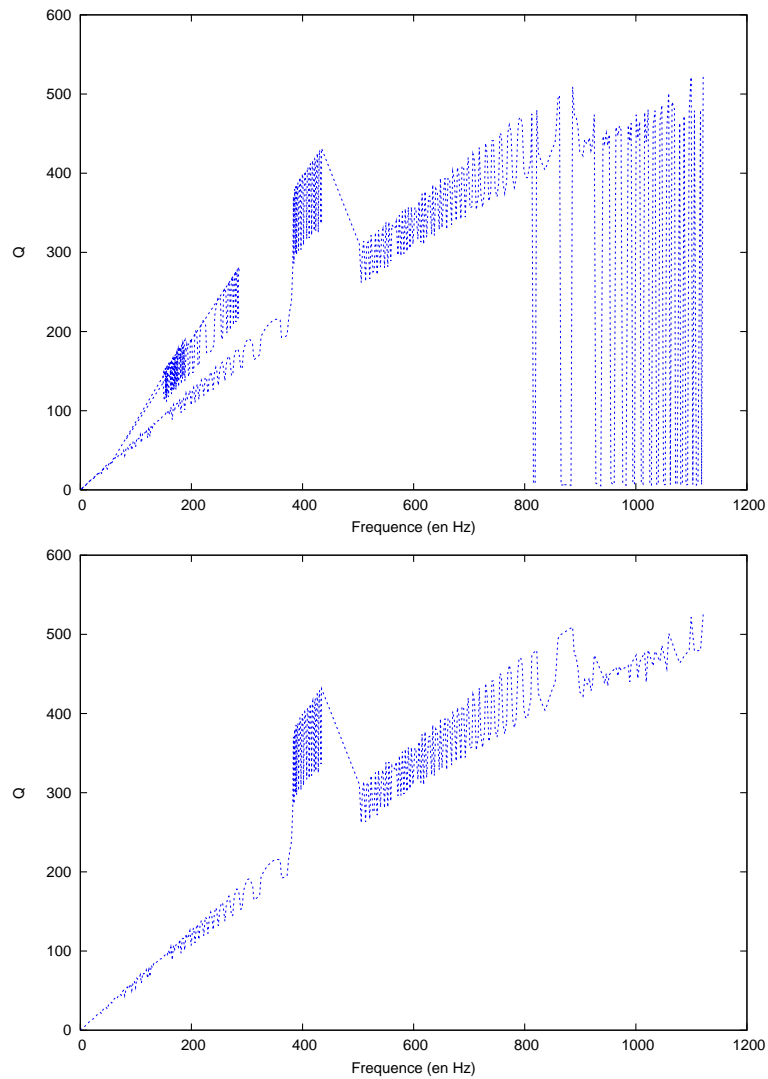


FIGURE 4.8 – Evolution du facteur de qualité Q en fonction de la fréquence du QPO, pour une densité de surface en $\alpha=(-3)$ et les conditions initiales $r_0=25 R_g$, $z(0)=0.0 R_g$, $\gamma=10^{-6}$, $\Delta t=0.375 T_g$, $\Delta\nu=1/(2\tau_{Fenetre})\nu_g$ et $z_0=10^{-4}$. La courbe de droite est débarassée des points considérés actuellement comme problématiques. On remarquera la modification du taux de croissance moyen de la courbe aux hautes fréquences ($\nu>800\text{hz}$).

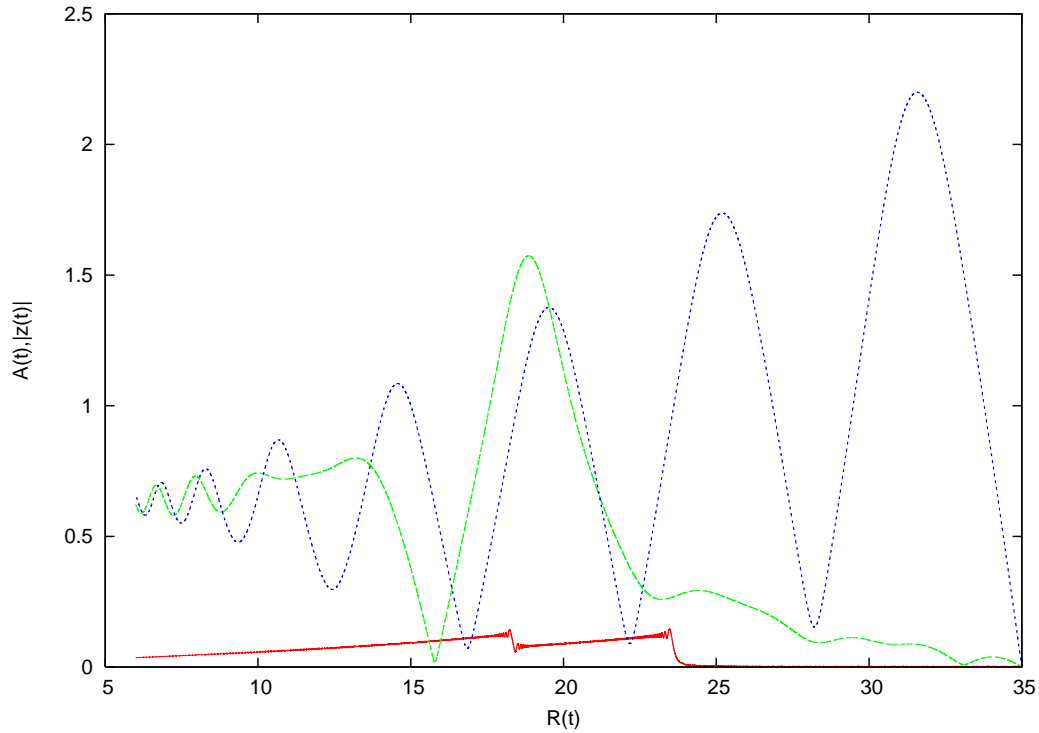


FIGURE 4.9 – Evolution de l'amplitude du signal $z(t)$ en fonction du temps et comparaison avec celle calculée avec la méthode de la moyenne.

la recherche d'un point quasi-fixe (voir Annexe 6.5), dont les variations de l'amplitude et de la phase sont reportées en Fig. 4.10. On peut y vérifier le blocage de la phase à $\phi(t) = -\pi$ (courbe de gauche), ce qui constitue une propriété de l'autorésonance (voir réf [5]), cependant la décroissance de l'amplitude en fonction du rayon $r(t)$ (courbe de droite) est contraire au phénomène de résonance. De plus, l'expression de l'amplitude (voir équation (3.26)) présente le terme $h_f(t)$ à son dénominateur varie en $r^{-2}(t)$, donc augmente avec le temps. Ceci est contradictoire avec les résultats numériques, cependant aucune explication satisfaisante n'a été formulée jusqu'à présent. Ces courbes sont obtenues en résolvant numériquement (3.27) (et pour vérification son équivalent (3.28)) par rapport à $A(t)$ avec le logiciel de calcul formel Maple.

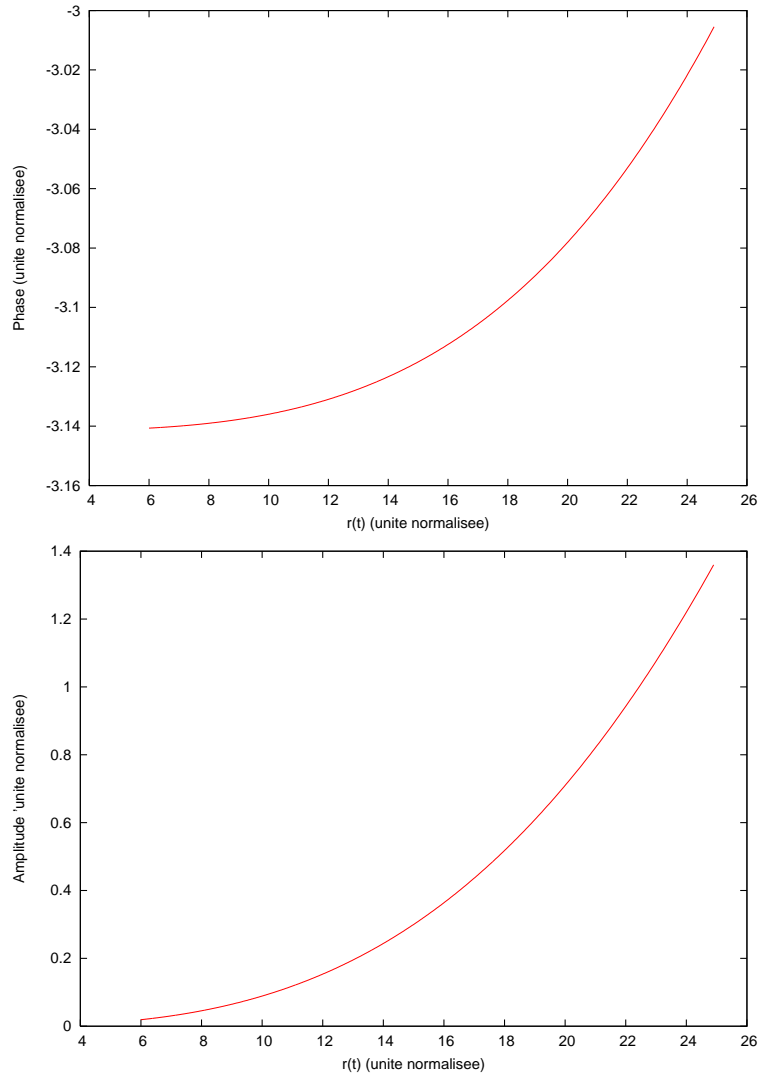


FIGURE 4.10 – Evolution de la phase $\phi(t)$ et de l'amplitude $|A(t)|$ obtenues lors de la recherche du point quasi-fixe avec la méthode de la moyenne (conditions initiales : $r_0=25 R_g$, $z(0)=10^{-4} R_g$, $\gamma=10^{-6}$, $\Delta t=0.375 T_g$, $\Delta\nu=1/(2\tau_{Fenetre})\nu_g$ et $z_0=10^{-4}$).

Chapitre 5

Conclusion

Les simulations effectuées permettent de reproduire une partie du comportement du facteur de qualité des QPOs des LMXB établie par les observations. La croissance du facteur de qualité est retrouvée numériquement pour l'objet 4U1636-536. Cependant, ces variations du facteur de qualité des émissions X est relative à un modèle qui ne tient pas compte de la structure particulière de l'espace-temps des étoiles à neutrons. L'ISCO est uniquement retenu comme limite supérieur de l'intégration des équations différentielles du mouvement de la particule modélisé. Ceci s'accorde avec les récentes interprétations des observations de 4U1636-536 proposées par Sanna A. et al (voir réf.[13]). Les différences qui subsistent par rapport aux valeurs atteintes lors des évolutions du facteur de qualité des émissions X est due au fenêtrage choisi pour le traitement des simulations.

Une meilleur compréhension de la décroissance aux basses fréquences du facteur de qualité est nécessaire. Ceci passe par une révision de l'algorithme qui extrait le facteur de qualité des densités spectrales de puissance. Le problème causé par l'amplitude du terme de forçage impose une réexamination approfondie de la méthode de la moyenne.

La modélisation des QPOs par le biais de résonances paramétriques au sien du disque d'accrétion pourra être affinée en incluant d'autres sources de résonances telles qu'un terme de Mathieu dans l'équation différentielle du mouvement, en tenant compte de l'espace-temps particulier ainsi que la nature de l'objet accrétou encore en remplaçant la particule test du modèle par un plasma qui soit le siège de phénomènes d'ordre magnétohydrodynamiques. Un profile plus réaliste du terme de dissipation est également à envisager.

L'arrivée d'ici 2025 de nouvelles données à très hautes résolution telles que celles attendues lors de la future mission IXO, présente raies fines dans les domaines X des spectres issus des binaires X à faible masse permettra de se pronocer avec plus de certitude sur la validité des modèles de formation de QPO, notamment grâce à l'appareil HTRS (High Time Resolution Spectrometer).

Chapitre 6

Annexe

6.1 Solution analytique pour l'oscillateur dissipatif entretenu

Il existe une solution analytique à l'oscillateur dissipatif entretenu par un forçage (voir réf.[16]). L'équation considérée est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec un second membre, représente la force excitatrice de pulsation ω_f ,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = h_f \cos(\omega_f t). \quad (6.1)$$

La solution $x(t)$ est la somme de la solution générale $x_g(t)$ de (6.1) sans second membre avec une solution particulière $x_p(t)$ déterminée par les conditions initiales (x_0, \dot{x}_0) . La solution générale $x_g(t)$ provient de la considération d'un trinôme dit caractéristique, dont les coefficients polynomiaux sont déterminés par l'équation différentielle de départ. En notant la variable arbitraire du trinôme, on a,

$$X^2 + 2\gamma X + \omega_0^2 = 0. \quad (6.2)$$

Le discriminant de (6.2) est $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$, d'où les racines complexes conjuguées,

$$X_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (6.3)$$

Ainsi, et en se plaçant dans une situation de faible dissipation, c'est-à-dire vérifiant $\gamma \ll \omega_0$ et donc $\Delta < 0$, il vient,

$$x_g(t) = \left(A \cos(\Im(X_{\pm})t) + B \sin(\Im(X_{\pm})t) \right) e^{\Re(X_{\pm})t}. \quad (6.4)$$

On obtient la pseudopériode du système $\tilde{\omega} := \Im(X_{\pm}) = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ainsi que l'argument de l'exponentielle $\Re(X_{\pm}) = -\gamma$. Ceci permet d'écrire la solution générale,

$$x_g(t) = \left(A \cos(\tilde{\omega}t) + B \sin(\tilde{\omega}t) \right) e^{-\gamma t}. \quad (6.5)$$

En qui concerne le second membre, nous recherchons une solution de la forme $D\cos(\omega_f t + E)$. L'étape suivante consiste à écrire, avec \tilde{O} le pendant complexe de la quantité réelle O ,

$$x_p(t) \rightarrow \tilde{x}_p(t) = X_m e^{i\omega_f t + \phi} = \tilde{X}_m e^{i\omega_f t}, \quad (6.6)$$

$$h_f(t) \rightarrow \tilde{h}_f(t) = h_f e^{i\omega_f t + \phi} = \tilde{h}_f e^{i\omega_f t}. \quad (6.7)$$

Injectées dans (6.1), les expressions de $x_p(t)$ et $h_f(t)$ permettent d'en déduire celles de l'amplitude complexe \tilde{X}_m , et par conséquent des coefficients de $x_p(t)$,

$$\tilde{X}_m = \frac{\tilde{h}_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2) + i(2\gamma\omega_f)}. \quad (6.8)$$

D'où,

$$D = \frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}, \quad (6.9)$$

$$(6.10) \quad \begin{cases} E = -\tan\left(-\frac{2\gamma}{\omega_f(\frac{\omega_0}{\omega_f}-1)}\right) & \text{si } (\frac{\omega_0}{\omega_f}-1) > 0 \\ E = -\pi - \tan\left(-\frac{2\gamma}{\omega_f(\frac{\omega_0}{\omega_f}-1)}\right) & \text{si } (\frac{\omega_0}{\omega_f}-1) < 0. \end{cases}$$

Ainsi la solution particulière, indépendante des conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 s'écrit de la manière suivante (il faut distinguer le cas particulier où l'argument de la fonction devient négatif et nécessite l'introduction d'un facteur $(-\pi)$),

$$x_p(t) = \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos\left(\omega_f t - [\pi] - \tan\left(-\frac{2\gamma}{\omega_f(\frac{\omega_0}{\omega_f}-1)}\right)\right), \quad (6.11)$$

Les conditions initiales à l'inst=0 donnent,

$$A = \left(x_0 - D \cos(E)\right), \quad (6.12)$$

$$B = \left(\frac{x_0 + \gamma A + D\omega_f \sin(E)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right). \quad (6.13)$$

Il découle de cette démonstration que la solution analytique de l'oscillateur dissipatif forcé, avec les conditions initiales $x(t=0)=x_0$ et $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$ est ¹,

1. La condition sur l'argument de l'soulignée en (6.10) reste valable pour les résultats encadrés

$$x(t) = \left(\left(x_0 - D \cos(E) \right) \cos(\tilde{\omega}t) + \left(\frac{x_0 + \gamma A + D \omega_f \sin(E)}{\tilde{\omega}} \right) \sin(\tilde{\omega}t) \right) e^{-\gamma t} + D \cos(\omega_f t + E). \quad (6.14)$$

Soit, en explicites différents coefficients,

$$x(t) = \left(\left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(-\tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) + \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \left\{ x_0 + \gamma \left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(-\tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right\} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) + \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \omega_f \sin \left(-\tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right\} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right) e^{-\gamma t} + \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(\omega_f t - \tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right). \quad (6.15)$$

Une solution alternative peut cependant être établie : elle consiste en la recherche d'une solution particulière de la forme $F \cos(\omega_f t) + G \sin(\omega_f t)$. On obtient pour les coefficients F et G,

$$F = \frac{h_f(\Omega^2 - \omega_f^2)}{(\Omega^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}, \quad (6.16)$$

$$G = \frac{h_f 2\gamma\omega_f}{(\Omega^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}. \quad (6.17)$$

Ceci mène, avec les expressions des coefficients A,B,D et E, à une solution composée autre écriture² de son second membre,

$$x(t) = \left(x_0 - D \cos(E) \right) \cos(\tilde{\omega}t) + \left(\frac{x_0 + \gamma A + D \omega_f \sin(E)}{\tilde{\omega}} \right) \sin(\tilde{\omega}t) e^{-\gamma t} + F \cos(\omega_f t) + G \sin(\omega_f t). \quad (6.18)$$

D'où, avec les expressions de D, E, F et G,

2. La compatibilité entre les deux expressions se vérifie par $D = \sqrt{F^2 + G^2}$ et $E = \tan(F/G)$

$$\begin{aligned}
x(t) = & \left(\left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(- \tan \left(- \frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right. \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \left\{ x_0 + \gamma \left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(- \tan \left(- \frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \omega_f \sin \left(- \tan \left(- \frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right\} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right) e^{-\gamma t} \\
& + \left(\frac{h_f(\Omega^2 - \omega_f^2)}{(\Omega^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} \right) \cos(\omega_f t) + \left(\frac{h_f 2\gamma\omega_f}{(\Omega^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} \right) \sin(\omega_f t).
\end{aligned}
\tag{6.19}$$

6.2 Solution pour l'oscillateur dissipatif forcé à la résonance

La solution analytique de l'oscillateur dissipatif entretenu présente des divergences dans certaines situations particulières, notamment dans le second membre $x_p(t)$ en cas de résonance non dissipative (c'est-à-dire où $\gamma=0$, $h_f \neq 0$ et $\omega_0 = \omega_f$). Celle-ci se lève par passage à la limite pour $\omega_0 \rightarrow \omega_f$. Le calcul peut s'effectuer avec la règle de l'Hospital (voir réf. [7]), et donne,

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_f} x_p(t) = \frac{h_f t}{2\omega_f} \sin \left(\omega_f t - \tan \left(- \frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right). \tag{6.20}$$

A noter la croissance linéaire de $x_p(t)$ en fonction du temps, et donc de $x(t)$ après dissipation de la composante continue au cours du régime transitoire (voir Fig. 6.1).

6.3 Erreurs entre les différentes méthodes de résolution des équations différentielles

L'emploi de plusieurs méthodes pour la résolution d'un seul problème impose la comparaison des résultats qu'elles fournissent. Seuls les oscillateurs réduits à leur termes dissipatifs et de forçage pouvant être résolus analytiquement, nous nous plaçons précisément dans l'un de ces cas puisque la solution exact est connue. La solution analytique est reportées dans les équations (6.15) et (6.19)³. Les erreurs relatives $E_{Num/Anal}(t)$ et $E_{Moyenne/Anal}(t)$ entre solution numérique, solution approchée par la méthode de la moyenne sont les suivantes,

$$E_{Num/Anal}(t) := \left(\frac{|x_{Num}(t) - x_{Anal}(t)|}{x_{Anal}(t)} \right), \tag{6.21}$$

3. Une autre écriture de cette solution existe (voir Annexe 6.1)

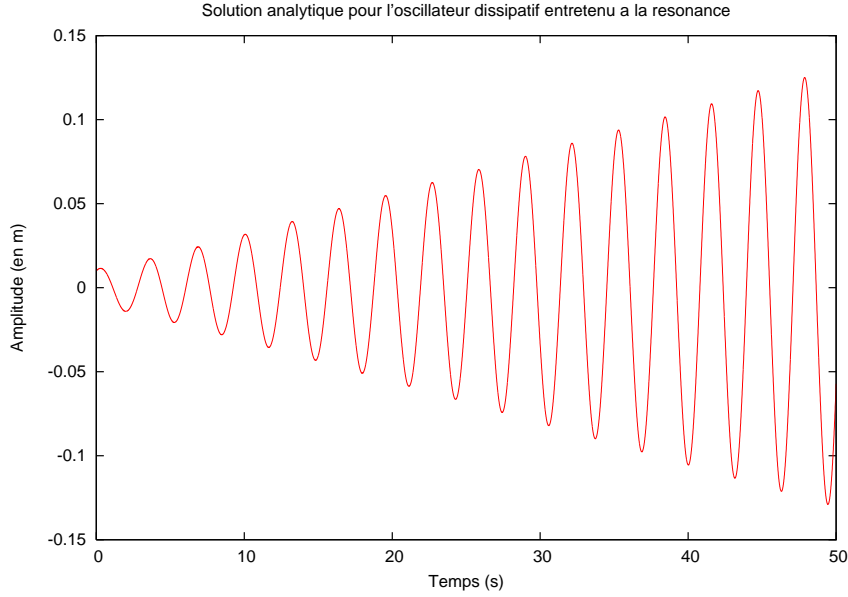


FIGURE 6.1 – Solution de l'oscillateur dissipatif forcé à la résonance (conditions initiales : $x(0) = 0.01$, $\dot{x}(0) = 0.0$, $\omega_f=2.0$).

$$E_{Moyennee/Anal}(t) := \left(\frac{|x_{Moyennee}(t) - x_{Anal}(t)|}{x_{Anal}(t)} \right). \quad (6.22)$$

Les expressions (3.20) et (3.21) sont telles que $x_{Moyennee}(t)$ correspondent à la simulation de $z(t)$ et que $x_{Anal}(t)$ soit tel que,

$$x_{Anal}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(-\tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \left\{ x_0 + \gamma \left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(-\tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \omega_f \sin \left(-\tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right\} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right) e^{-\gamma t} \\ \left. + \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(\omega_f t - \tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \text{ si } -\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} > 0 \right. \\ \left(\left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(-\pi - \tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \left\{ x_0 + \gamma \left(x_0 - \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(-\pi - \tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \omega_f \sin \left(-\pi - \tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \right\} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) \right) e^{-\gamma t} \\ \left. + \left(\frac{h_f}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right) \cos \left(\omega_f t - \pi - \tan \left(-\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} \right) \right) \text{ si } -\frac{2\gamma}{\omega_f \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} - 1 \right)} < 0. \right. \end{array} \right.$$

La comparaison des solutions donne les résultats suivants : l'erreur entre solution analytique

et solution numérique augmente avec le temps pour atteindre 5.10^{-6} sur un temps de 4000 s. En ce qui concerne l'erreur entre solution analytique et solution approchée avec la méthode de la moyenne, l'erreur également pour se hisser à environ 6.10^{-7} au cours de la même durée. On note cependant que ces erreurs augmentent périodiquement avec le temps.

6.4 Application de la méthode de la moyenne à l'équation différentielle du modèle.

Dans ce paragraphe, on se propose d'appliquer la méthode de la moyenne présentée succinctement en section 3.2 et démontrée dans les réf. [18] à l'équation différentielle d'un oscillateur comportant toutes les contributions imaginées dans la description des épicycliques képlérienne auxquelles peuvent être sujet la trajectoire des particules du modèle, ainsi qu'un terme retenu dans notre l'étude, mais également ceux explorés en réf. [12]. Seront donc pris en compte le terme de Mathieu, des composantes quadratiques et cubiques ainsi qu'un forçage périodique du système. Le système d'équations différentielles du mouvement vertical $z(t)$ des particules est constitué des équations (6.23) et (6.24),

$$\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2(1 + h_p \cos(\omega_p t))z(t) = \alpha z^2(t) + \beta z^3(t) + h_f \cos(\omega_f t + \phi), \quad (6.23)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}(t). \quad (6.24)$$

Il convient ensuite de mettre ce système sous la forme requise pour l'application de la méthode de la moyenne, c'est-à-dire d'effectuer le changement de variables permet de passer des variables physiques aux variables lentes,

$$\dot{r} = -\frac{\epsilon}{\Omega} f(r \cos(\Omega t + \phi), -r\Omega \sin(\Omega t + \phi), \epsilon_i) \sin(\Omega t + \phi), \quad (6.25)$$

$$\dot{\phi} = \Omega - \frac{\epsilon}{r\Omega} f(r \cos(\Omega t + \phi), -r\Omega \sin(\Omega t + \phi), \epsilon_i) \cos(\Omega t + \phi). \quad (6.26)$$

D'où, en explicitant la fonction $f(z(t), \dot{z}(t), t)$, avec $\Omega = 2\pi/T$,

$$\begin{aligned} \dot{r} = & -\frac{1}{\Omega} \left(2\gamma r \sin^2(\Omega t + \phi) + \alpha r^2 \sin(\Omega t + \phi) \cos^2(\Omega t + \phi) + \beta r^3 \cos^3(\Omega t + \phi) \sin^3(\Omega t + \phi) \right. \\ & \left. + h_f \cos(\omega_f t) \sin(\Omega t + \phi) + r h_p \cos(\omega_p t) \sin(\Omega t + \phi) \cos(\Omega t + \phi) \right), \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & -\frac{1}{\Omega} \left(2\gamma r \sin(\Omega t + \phi) \cos(\Omega t + \phi) + \alpha r^2 \cos^3(\Omega t + \phi) + \beta r^3 \cos^4(\Omega t + \phi) \right. \\ & \left. + h_f \cos(\omega_f t) \sin(\Omega t + \phi) + r h_p \cos(\omega_p t) \cos^2(\Omega t + \phi) \right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

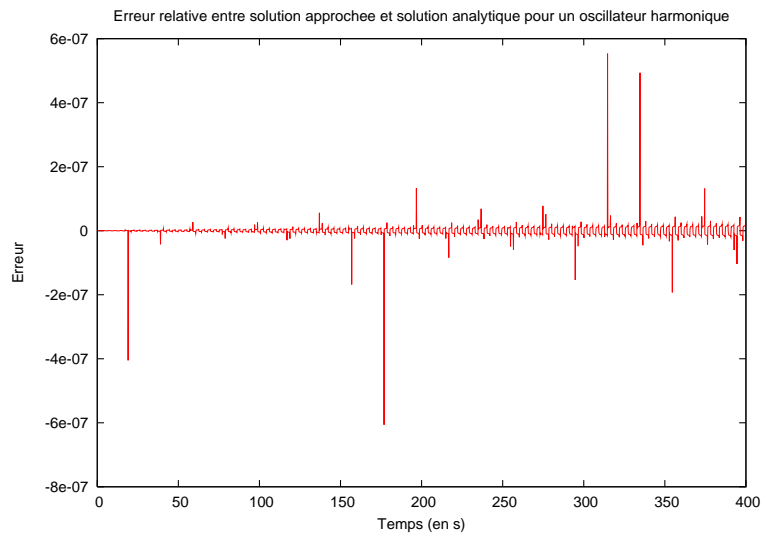


FIGURE 6.2 – Evolution de l'erreur relative $E_{Moyenne/Anal}(t)$ entre solution analytique et approchée au cours du temps.

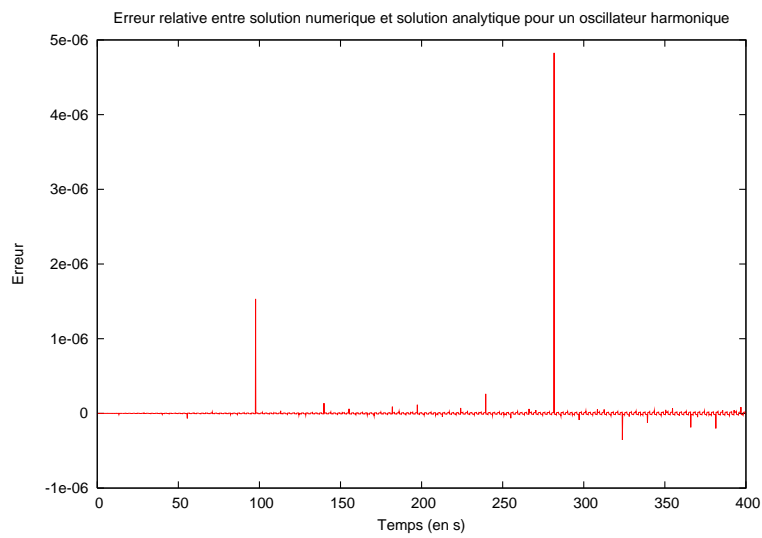


FIGURE 6.3 – Evolution de l'erreur relative $E_{Num/Anal}(t)$ entre solution analytique et numérique au cours du temps.

L'intégrale nécessaire au moyennage des expressions de \dot{r} et $\dot{\phi}$ par rapport au temps donne,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{r} dt \\ \dot{r} &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^T \left(2\gamma r \sin^2(\Omega t + \phi) + \alpha r^2 \sin(\Omega t + \phi) \cos^2(\Omega t + \phi) + \beta r^3 \cos^3(\Omega t + \phi) \sin(\Omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + h_f \cos(\omega_f t) \sin(\Omega t + \phi) + r h_p \cos(\omega_p t) \sin(\Omega t + \phi) \cos(\Omega t + \phi) \right) dt,\end{aligned}\tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi} dt \\ \dot{\phi} &= \frac{-1}{2\pi\Omega} \int_0^T \left(2\gamma r \sin(\Omega t + \phi) \cos(\Omega t + \phi) + \alpha r^2 \cos^3(\Omega t + \phi) + \beta r^3 \cos^4(\Omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + h_f \cos(\omega_f t) \sin(\Omega t + \phi) + r h_p \cos(\omega_p t) \cos^2(\Omega t + \phi) \right) dt.\end{aligned}\tag{6.30}$$

Puis, en tenant compte du calcul des intégrales suivantes, nous pouvons nous occuper de tous les termes, excepté ceux qui relèvent du forçage ou du terme de Mathieu :

$$\int_0^T \sin^2(\Omega t + \phi) dt = \int_0^T \frac{1 - \cos(2(\Omega t + \phi))}{2} dt = \frac{T}{2},\tag{6.31}$$

$$\int_0^T \sin(\Omega t + \phi) \cos^2(\Omega t + \phi) dt = \left[\frac{\cos^3(\Omega t + \phi)}{(-3)\Omega} \right]_0^T = 0,\tag{6.32}$$

$$\int_0^T \sin(\Omega t + \phi) \cos^3(\Omega t + \phi) dt = \left[\frac{\cos^4(\Omega t + \phi)}{(-4)\Omega} \right]_0^T = 0,\tag{6.33}$$

$$\int_0^T \sin(\Omega t + \phi) \cos(\Omega t + \phi) dt = \left[\frac{\cos^2(\Omega t + \phi)}{(-2)\Omega} \right]_0^T = 0,\tag{6.34}$$

$$\int_0^T \cos^3(\Omega t + \phi) dt = 0,\tag{6.35}$$

$$\int_0^T \cos^4(\Omega t + \phi) dt = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2\phi) + \frac{1}{8} (1 + \cos(4\phi)) \right]_0^T = \frac{3}{8} T.\tag{6.36}$$

Si l'on se concentre sur les termes originaires du forçage d'amplitude h_f , en utilisant les identités trigonométriques ainsi que les formules de duplication,

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(\Omega t + \phi) \cos(\omega_f t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\cos((\Omega + \omega_f)t + \phi) + \cos((\Omega - \omega_f)t + \phi) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega + \omega_f} \left(\sin(\phi) \left(\cos\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) - 1 \right) + \cos(\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Omega - \omega_f} \left(\sin(\phi) \left(\cos\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) - 1 \right) - \cos(\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) \right) \right) \\ \int_0^T \cos(\Omega t + \phi) \cos(\omega_f t) dt &= \frac{-1}{\Omega^2 - \omega_f^2} \left(\omega_f \cos(\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) + 2\Omega \sin(\phi) \sin^2\left(\frac{\pi\omega_f}{\Omega}\right) \right),\end{aligned}\tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(\Omega t + \phi) \cos(\omega_f t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\sin((\Omega + \omega_f)t + \phi) + \sin((\Omega - \omega_f)t + \phi) \right) dt \\
&= \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\Omega + \omega_f} \left(\cos(\phi) \left(\cos\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) - 1 \right) - \sin(\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Omega - \omega_f} \left(\cos(\phi) \left(\cos\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) - 1 \right) + \sin(\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) \right) \right) \\
\int_0^T \sin(\Omega t + \phi) \cos(\omega_f t) dt &= \frac{1}{\Omega^2 - \omega_f^2} \left(\omega_f \sin(\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_f}{\Omega}\right) - \Omega \cos(\phi) \sin^2\left(\frac{\pi\omega_f}{\Omega}\right) \right).
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Enfin, en effectuant le même travail sur les composantes res, tributaires de la présence du terme de Mathieu,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(\Omega t + \phi) \sin(\Omega t + \phi) \cos(\omega_p t) dt &= \frac{1}{4} \int_0^T \left(\sin((2\Omega + \omega_p)t + 2\phi) + \sin((2\Omega - \omega_p)t + 2\phi) \right) dt \\
&= \frac{1}{4(2\Omega + \omega_p)} \left(-\cos\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega} + 2\phi\right) + \cos(2\phi) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4(2\Omega - \omega_p)} \left(-\cos\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega} - 2\phi\right) + \cos(2\phi) \right) \\
\int_0^T \cos(\Omega t + \phi) \sin(\Omega t + \phi) \cos(\omega_p t) dt &= \frac{1}{4((2\Omega)^2 - \omega_p^2)} \left(-4\Omega(\cos(2\phi) - \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \sin(2\phi)) \right. \\
&\quad \left. - 2\omega_p \sin(2\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \right),
\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos^2(\Omega t + \phi) \cos(\omega_p t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(\omega_p t) dt + \frac{1}{4} \int_0^T \left(\cos((2\Omega - \omega_p)t + 2\phi) + \cos((2\Omega + \omega_p)t + 2\phi) \right) dt \\
&= \frac{1}{2\omega_p} \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) + \frac{1}{4(2\Omega - \omega_p)} \left(\sin\left(2\left(\phi - \pi\frac{\omega_p}{\Omega}\right)\right) - \sin(2\phi) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4(2\Omega + \omega_p)} \left(\sin\left(2\left(\phi + \pi\frac{\omega_p}{\Omega}\right)\right) - \sin(2\phi) \right) \\
\int_0^T \cos^2(\Omega t + \phi) \cos(\omega_p t) dt &= \frac{1}{2\omega_p} \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4((2\Omega)^2 - \omega_p^2)} \left(4\Omega \sin(2\phi) \left(\sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) - 1 \right) - 2\omega_p \cos(2\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \right).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Finalement, nous obtenons les expressions de r et de ϕ indépendantes de t , issues de l'application de la méthode de la moyenne au système différentiel ((6.23),(6.24)),

$$\begin{aligned}
\int_0^T \dot{r} dt &= \left(-\gamma r \right) + \frac{h_f}{2\pi} \left(\frac{\omega_f \sin(\psi) \sin(\omega_f T) - 2\Omega \cos(\psi) \sin^2\left(\frac{\omega_f T}{2}\right)}{\Omega^2 - \omega_f^2} \right) \\
&\quad - \frac{r\Omega h_p}{8\pi((2\Omega)^2 - \omega_p^2)} \left(4\Omega(\cos(2\phi) - \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \sin(2\phi)) + 2\omega_p \sin(2\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \right),
\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \dot{\phi} dt &= \left(\frac{-3\beta r^2}{8\Omega} \right) + \frac{h_f}{2\pi r} \left(\frac{2\Omega \sin(\psi) \sin^2\left(\frac{\omega_f T}{2}\right) + \omega_f \cos(\psi) \sin(\omega_f T)}{\Omega^2 - \omega_f^2} \right) \\
&\quad + \frac{\Omega h_p}{4\pi\omega_p} \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \\
&\quad + \frac{h_p}{8\pi((2\Omega)^2 - \omega_p^2)} \left(4\Omega \sin(2\phi) \left(\sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) - 1 \right) - 2\omega_p \cos(2\phi) \sin\left(\frac{2\pi\omega_p}{\Omega}\right) \right).
\end{aligned} \tag{6.42}$$

La recherche de points fixes s'effectue pour une forme des équations (6.41) et (6.42) obtenues en prenant leur limite pour des fréquences de Matthieu ω_p ainsi que de forçage ω_f qui tendent vers la valeurs de la fréquence propre du système physique Ω ,

$$\dot{r} = \lim_{\substack{\omega_p \rightarrow \Omega \\ \omega_f \rightarrow \Omega}} \int_0^T \frac{\dot{r}}{T} dt = -\gamma r - \frac{h_f \sin(\phi)}{2\Omega} + \frac{r h_p}{16\pi} \sin(2\phi), \quad (6.43)$$

$$\dot{\phi} = \lim_{\substack{\omega_p \rightarrow \Omega \\ \omega_f \rightarrow \Omega}} \int_0^T \frac{\dot{\phi}}{T} dt = \frac{-3\beta r^3}{8\Omega} - \frac{h_f \cos(\phi)}{2r\Omega} + \frac{h_p}{16\pi} \cos(2\phi). \quad (6.44)$$

6.5 Détermination de la paramétrisation de l'amplitude du signal X

Si l'on considère le système (6.43) et (6.44) pour notre modèle d'oscillateur non-linéaire forcé, nous devons omettre le terme de Mathieu afin de se ramener au modèle, et se souvenir que les coefficients de l'équation différentielle du mouvement ne sont pas consau cours du temps. Par commodité, on note $A(t)$ l'amplitude de la solution, $r(t)$ éréservé à la disde la particule au centre de masse de l'objet compact,

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\gamma r(t)) - \frac{h_f \sin(\phi(t))}{2\Omega(t)} \\ \left(\frac{-3\beta(t)r(t)^2}{8\Omega(t)} - \frac{h_f \cos(\phi(t))}{2r(t)\Omega(t)} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(6.45)

La phase s'obtient en résolvant le système d'équations non-linéaires (6.45) par rapport à ϕ à chaque pas de temps de l'intégration des équations différentielles du mouvement,

$$\sin(\phi(t)) = -\frac{\gamma r(t)\Omega(t)}{h_f(t)}, \quad (6.46)$$

$$\cos(\phi(t)) = -\frac{3\beta(t)r^4(t)}{4h_f(t)}, \quad (6.47)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \tan\left(\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)} - \frac{6\beta(t)A^3(t)}{8h_f}\right) & \text{si } \left(\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)} - \frac{6\beta(t)A^3(t)}{8h_f}\right) > 0 \\ \tan\left(\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)} - \frac{6\beta(t)A^3(t)}{8h_f}\right) + \pi & \text{si } \left(\frac{-2\gamma A(t)\Omega(t)}{h_f(t)} - \frac{6\beta(t)A^3(t)}{8h_f}\right) < 0. \end{cases}$$

Avec $r(t)$ désignant ici la disde la particule au centre de masse de l'objet accré,

$$r(t) = \left(r_0^{\alpha+2} - (\alpha + 2)r_0^{\alpha+1}v_0t \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} ; \alpha \neq 2,$$

Notons que l'on pourrait tout aussi bien et de manière équivalente résoudre numériquement le système ((6.43),(6.44)). Il faut ensuite tenir compte de la dépendance en temps des coefficients de l'équation différentielle (6.23) et évaluer pour chaque pas de temps :

D'où l'amplitude recherchée,

$$A(t) = -\frac{h(t) \sin(\phi)}{\Omega(t)\gamma}. \tag{6.48}$$

Les Fig. 6.4 à 6.11 représentent l'amplitude de la solution numérique superposée à la fonction $A(t)$ obtenue avec la méthode de la moyenne, pour différentes valeurs de la vitesse initiale v_0 de la particule du modèle. La fonction approximée rend compte dans certains cas particuliers (voir 6.7) des évolutions de l'amplitude du signal pour des temps petits. Un écart se creuse au fur et à mesure que l'orbite de la particule autour de l'étoile à neutrons se réduit. Cette constatation n'est pas en accord avec ce que nous attendons de la méthode de la moyenne. Il y a donc ici un biais dont les causes restent à déterminer. Les conditions initiales et paramètres choisis afin d'exécuter ces simulations sont : $r_0=50 R_g$, $z(0)=10^{-3}R_g$, $\gamma=10^{-6}$, $\Delta_t=0.375 T_g$, $\Delta_\nu=1.9 \times 10^{-6} \nu_g$. Les résultats sont affichés dans une fenêtre [6,35] R_g .

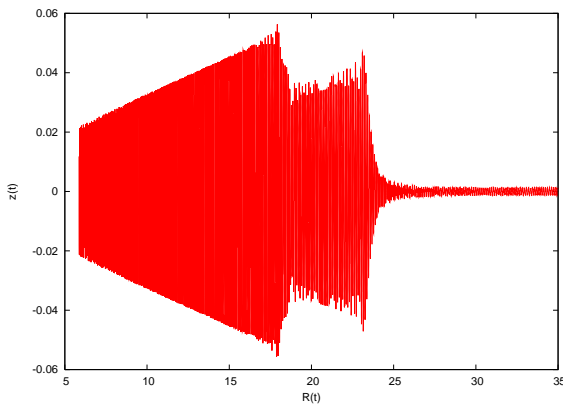


FIGURE 6.4 – Simulation des épicycliques verticales avec $v_0/c = 10^{-4}$ et $\alpha=0$.

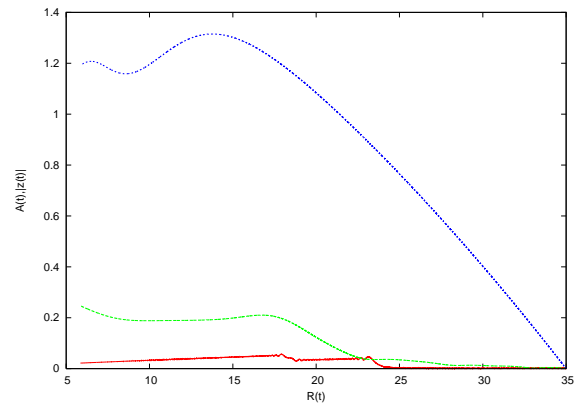


FIGURE 6.5 – Amplitudes numérique et approchées des épicycliques avec $v_0/c = 10^{-5}$ et $\alpha=0$.

Notons qu'il y a deux types d'amplitudes issues de la méthode de la moyenne : celle hors résonance, relative à (6.41) et (6.42) (en vert sur les Fig. 6.4 à 6.11) et celles à la résonance, rattachées à (6.43) et (6.44), (en bleu sur les Fig. 6.4 à 6.11). Elles se rejoignent pour un rayon du disque d'environ $18R_g$, ce qui est cohérent avec la condition de résonance (3.5).

Enfin, il est imporde se souvenir que ces expressions approchées sont obtenues pour $\omega_f \rightarrow \Omega$. Numériquement les résultats serait sensiblement différents aux grands $r(t)$ (début de l'intégration) pour des expressions issues de $\Omega \rightarrow \omega_f$.

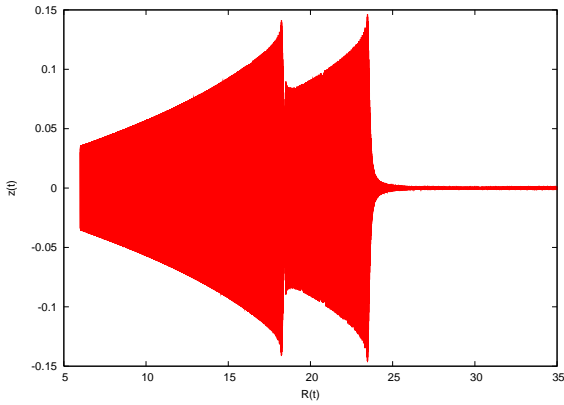


FIGURE 6.6 – Simulation des épicycliques verticales avec $v_0/c = 10^{-5}$ et $\alpha=0$.

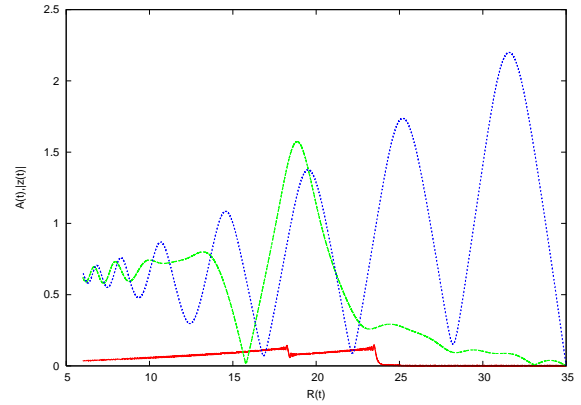


FIGURE 6.7 – Amplitudes numérique et approchées des épicycliques avec $v_0/c = 10^{-5}$ et $\alpha=0$.

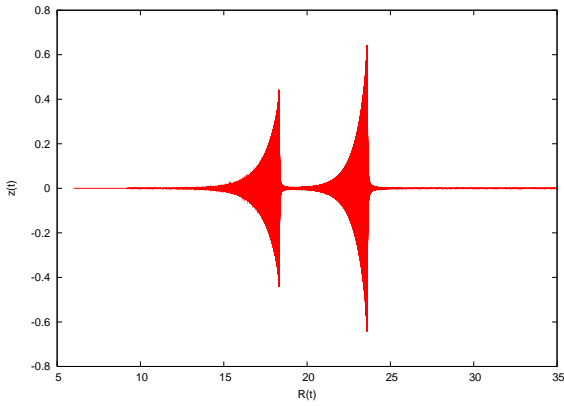


FIGURE 6.8 – Simulation des épicycliques verticales avec $v_0/c = 10^{-6}$ et $\alpha=0$.

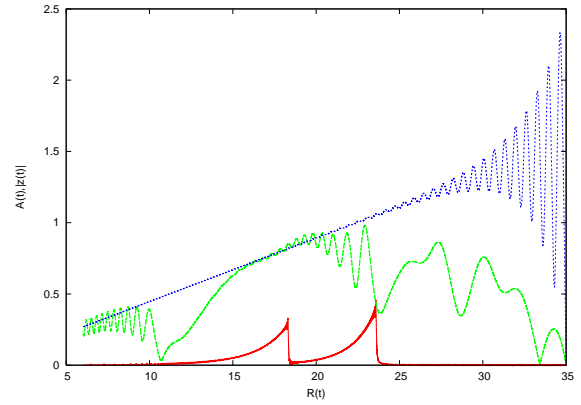


FIGURE 6.9 – Amplitudes numérique et approchées des épicycliques avec $v_0/c = 10^{-6}$ et $\alpha=0$.

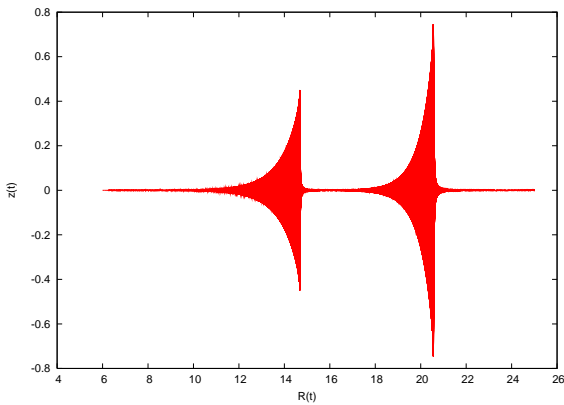


FIGURE 6.10 – Simulation des épicycliques verticales avec $v_0/c = 0.5$ et $\alpha=0$.

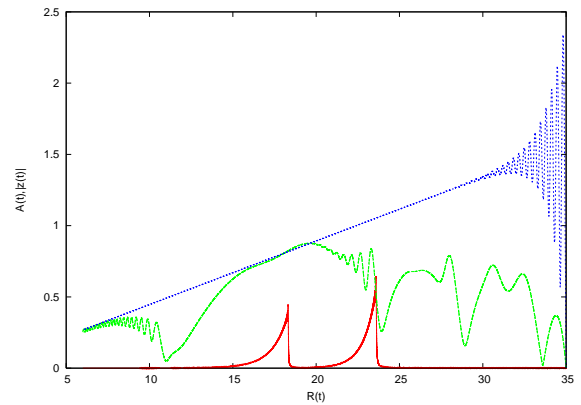


FIGURE 6.11 – Amplitudes numérique et approchées des épicycliques avec $v_0/c = 0.5$ et $\alpha=0$.

Bibliographie

- [1] Arfken G., *Mathematical methods for physicists*, 3ème edition, Academic Press Inc, New-York
- [2] Barret D., Olive J.-F., Miller M. C., 2007, *Mon. Not. R. Astron. Sco.*, Vol. 361, Iss. 3, 855-860
- [3] Efstathiou G., Hobson M., Lasenby A., *Relativité générale*, De Boeck, Paris
- [4] Olive J.-F., *Oscillations millisecondes des binaires X : la révolution RXTE*, in *Etoiles doubles, des étoiles à grandes séparations aux binaires X* (ouvrage collectif, p. 243-286), Ecole thématique du CNRS, Observatoire Astronomique de Strasbourg, Société Française de Physique, 2000
- [5] Khain E., Meerson B., *Phys., Rev.*, vol. 64., 036619
- [6] Miller M.C., 1999, *ApJ.*, 515 :L77-L80
- [7] Landau L., Lifchitz E., *Mécanique*, éditions MIR, Moscou, 1966
- [8] Pétri J., 2005, *A&A*, Vol.439, 443-459
- [9] Pétri J., 2005, *A&A*, Vol. 439., L27-L30
- [10] Pétri J., 2006, *Astrophys Space Sci*, Vol. 302., 117-139
- [11] Pétri J., 2008, *Astrophys Space Sci*, Vol. 318., 181-186
- [12] Pétri J., *Constraining the masse and moment of inertia of neutron stars from quasi-periodic oscillations in X-ray binaries*, *AA*, (in prep.), 2010
- [13] Sanna Andrea, Méndez Mariano, Altamirano Diego, Homan Jeroen, Casella Piergiorgio, Belloni Tomaso, Lin Dacheng, Van der Klis Michel, Wijnans Rudy, *The kilohertz quasi-periodic oscillations during the Z and atoll phases of the unique transient XTE J1701-462* (in prep.), 2010, *Mon. Not. R. Astron. Sco.*
- [14] Stuart L.S., Teukolsky S.A., 1983, *Black Holes, Whites Dwarfs and Neutron Stars : the Physics of Compact Objects*, Wiley & Sons, New-York
- [15] Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2007
- [16] Del Pedro M., Pahud P., *Mécanique vibratoire : systèmes discrets linéaires*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1988
- [17] Van der Klis M., 2006, *Adv. in Sp. Res.*, Vol. 38, 2675-2679
- [18] Zarmi Y., *Introduction to nonlinear dynamics*, chap 8 : *Methods of averaging*, chap 10 : *Averaging in periodic systems*, notes de cours de l'Université Ben-Gurion de Negev, version du 27 décembre 2007, <http://physweb.bgu.ac.il/COURSE/NonlinearDynamics/Index.html>
- [19] Zhang W., Lapidus I., White N.E., Titarchuk. L., 1996, *ApJ* 469 :L17-L19